

Κ. ΚΑΡΟΥΜΠΑΛΟΥ
ΤΑΚΤ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

Κ. ΒΑΛΕΟΝΤΗ
ΦΥΣΙΚΟΥ
ΡΑΔΙΟΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ

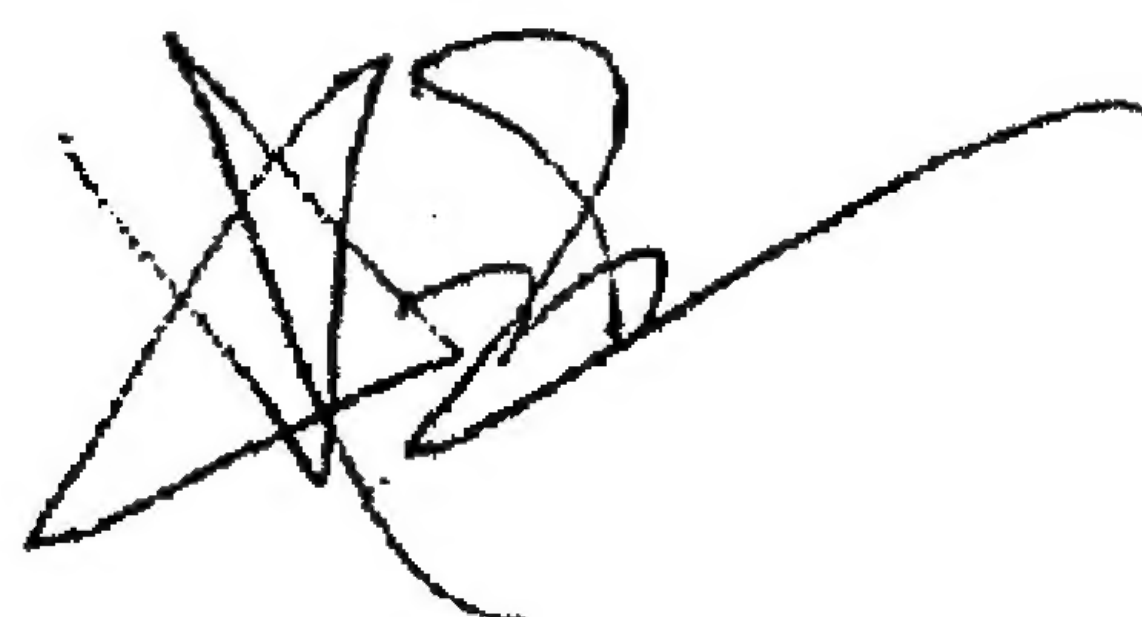
εφαρμοσμενος
ηλεκτρομαγνητισμος

Κ. ΚΑΡΟΥΜΠΑΛΟΥ
ΤΑΚΤ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

Κ. ΒΑΛΕΟΝΤΗ
ΦΥΣΙΚΟΥ
ΡΑΔΙΟΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ

εφαρμοσμενος
ηλεκτρομαγνητισμος

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από ένα εκ των
συγγραφέων.

A handwritten signature in black ink, consisting of a series of loops and a long horizontal stroke extending to the right.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τό βιβλίο αυτό περιέχει τίς παραδόσεις πού ἔκανε ὁ καθηγητής κ. Κ. Καρούμπalos τό 1975-76 στό Α' ἔτος τῶν Μεταπτυχιακῶν "Ενδεικτικῶν 'Ηλεκτρονικῆς" τοῦ Πανεπιστημίου 'Αθηνῶν, στό μάθημα τοῦ 'Ηλεκτρομαγνητισμοῦ.

Τό ἀρχικό κείμενο βελτιώθηκε καί συμπληρώθηκε σέ συνεργασία μέ τόν Ραδιοηλεκτρολόγο Φυσικό κ. Κ. Βαλεοντῆ, ὁ ὁποῖος συνέταξε καί τό μέρος τῶν προβλημάτων.

Σκοπός μας ἦταν νά δώσουμε ἓνα αυτόνομο, συνεπτυγμένο κείμενο, πού ν' ἀναδείχνει, κατά τρόπο ἐπαγωγικό, ἐκεῖνα κυρίως τά θέματα ἀπό τό μεγάλο καί ὠραῖο κεφάλαιο τοῦ 'Ηλεκτρομαγνητισμοῦ, πού συναντᾶ συχνά ὁ ἐφαρμοσμένος φυσικός καί ὁ ἐπιστήμονας τηλεπικοινωνιακός μηχανικός.

Πρόθεσή μας ἦταν νά καλύψουμε, ἔτσι, ἓνα κενό πού ὑπάρχει, κατά τή γνώμη μας, στήν περιοχή αὐτή τῆς ἐλληνικῆς βιβλιογραφίας.

Ἐπιδιώκαμε, ὅμως, ἡ διαπραγμάτευση τῶν κλασικῶν αὐτῶν ἐφαρμογῶν τοῦ 'Ηλεκτρομαγνητισμοῦ, διατηρώντας τήν ἀναγνωρισμένη ἐπιστημονική καί μεθοδολογική της ἀξία, νά παραμένει προσιτή στόν ἀναγνώστη χωρίς τήν ἀνάγκη ἀναδρομῶν σέ ἐκτενέστερα, αὐστηρότερα, ἀλλά κάποτε δύσβατα συγγράμματα. Ἄν πραγματικά πετύχαμε στήν ἐπιθυμία μας αὐτή, τότε τό βιβλίο θά εἶναι χρήσιμο, ἐκτός ἀπό τόν μεταπτυχιακό, καί στόν ἀπαιτητικό προπτυχιακό σπουδαστή.

Τό βιβλίο περιέχει βασικά ἑπτά κεφάλαια καί 108 προβλήματα.

Τό πρῶτο κεφάλαιο περιλαμβάνει μιᾶ μεθοδική ἀνάπτυξη τῶν ἀπαραίτητων μαθηματικῶν γνώσεων, καί ἔχει κύριο σκοπό ν' ἀπελευθερώσει τόν ἀναγνώστη ἀπό ἓνα εἰδικό σύστημα συντεταγμένων καί νά τόν ἐξοικειώσει μέ τίς ἐκφράσεις καί τή χρήση τῶν τελεστῶν τῆς διανυσματικῆς ἀνάλυσης.

Ἀπό τά ὑπόλοιπα ἑξί κεφάλαια, τά τρία πρῶτα, δηλ. τά 2, 3 καί 4, συνιστοῦν οὐσιαστικά ἓνα πρῶτο μέρος, ὅπου δίνονται οἱ βασικές θεωρητικές γνώσεις κατά τρόπο προσανατολισμένο στό ἀντικείμενο τοῦ βιβλίου. Ἔτσι:

Στό κεφάλαιο 2 δίνονται οἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell καί οἱ σχετικοί φυσικοί νόμοι, τοὺς ὁποίους ἐκφράζουν. Δίνεται ἀκόμα ἡ ἐξίσωση τῆς συνέχειας, καί γίνεται ἀπλούστευση τῶν ἐξισώσεων γιά τήν περίπτωση ἁρμονικῶν πεδίων καί πηγῶν.

Στό κεφάλαιο 3 όρίζονται τά δυναμικά (μονόμετρο Φ καί διανυσματικό \vec{A}) καί διατυπώνεται, μέ τή βοήθεια τών θεμελιωδών έξισώσεων, ή διαφορική έξίσωση τοῦ κύματος, εἴτε μέ τή βοήθεια τών δυναμικῶν εἴτε μέ τή βοήθεια τών πεδίων· συνδέονται, ἔτσι τά πεδία μέ τίς πηγές τους (φορτία χώρου ρ καί ρεύματα \vec{J}).

Μιά πρώτη λύση τών "όμογενῶν" έξισώσεων (χωρίς πηγές διέγερσης) καί ή διερεύνησή της γιά ἐπίπεδο μονοχρωματικό κύμα, δίνει τήν εὐκαιρία ν' ἀναδειχτεῖ ή σημασία τών διάφορων παραμέτρων τοῦ μέσου διάδοσης καί νά γίνει ή σύνδεσή τους μέ τά χαρακτηριστικά τοῦ κύματος. Στή συνέχεια, δείχνεται πῶς ή ἀρχή τῆς διατήρησης τῆς ἐνέργειας ὀδηγεῖ στό θεώρημα τοῦ Poynting, ὀρίζεται τό διάνυσμα Poynting \vec{P} καί γίνεται ή μαθηματική καί φυσική του διερεύνηση γιά τυπικές περιπτώσεις. Ἀκολουθεῖ ή μελέτη τών μή ὁμογενῶν έξισώσεων, ή ἐπίλυση γιά τήν περίπτωση ἀρμονικῶν πηγῶν διέγερσης καί ή διατύπωση τών "καθυστερημένων δυναμικῶν". Τέλος, τό κεφάλαιο αὐτό κλείνει μέ τήν τόσο βασική μελέτη τῆς ἀκτινοβολίας στοιχειώδους ἡλεκτρικοῦ καί στοιχειώδους μαγνητικοῦ διπόλου, μελέτη πού γίνεται ὅσο τό δυνατό πληρέστερα γιά ἀρμονικό ρεύμα διέγερσης.

Τό σύντομο κεφάλαιο 4 εἶναι ἀφιερωμένο στό σημαντικό γιά τίς ἐφαρμογές θέμα τών συνθηκῶν στά ὅρια. Μετά τή γενική μελέτη, ἀντιμετωπίζονται οἱ ἀκραῖες, εἰδικές περιπτώσεις (τελείως ἀγώγιμων καί τελείως μονωτικῶν μέσων) καί συνοφίζονται τά σχετικά συμπεράσματα.

Τά τρία κεφάλαια 5, 6 καί 7 συνιστοῦν οὐσιαστικά τό δεύτερο μέρος τοῦ βιβλίου. Στό μέρος αὐτό γίνεται ἐφαρμογή τών ἀρχῶν τοῦ ἡλεκτρομαγνητισμοῦ στούς κυματοδηγούς καί τά ἀντηχεῖα, στή διάδοση μέσα ἀπό ἰονισμένα μέσα καί τέλος στή μελέτη τῆς πόλωσης τοῦ ἡλεκτρομαγνητικοῦ κύματος καί τών ἀριστων συνθηκῶν ζεύξης τοῦ κύματος μέ κεραία γνωστῶν χαρακτηριστικῶν πόλωσης. Εἰδικότερα:

Στό κεφάλαιο 5, μετά ἀπό μιὰ γενική παρουσίαση τοῦ θέματος τῆς κυματοδηγῆσης καί τήν ταξινομήση τών διάφορων "κυματικῶν τύπων" (modes) πού μπορεῖ ν' ἀκολουθήσουν τά "τρέχοντα" κύματα μέσα στόν κυματοδηγό, γίνεται λεπτομερέστερη μελέτη τόσο τοῦ ὀρθογώνιου ὅσο καί τοῦ κυκλικοῦ κυλινδρικοῦ κυματοδηγοῦ. Καί στίς δύο περιπτώσεις ή μελέτη ἐξειδικεύεται τελικά στή διερεύνηση ἀφενός τοῦ "ἐγκάρσιου κυματικοῦ τύπου" TE καί ἀφετέρου τοῦ "ἐγκάρσιου μαγνητικοῦ τύπου" TM.

Εἶναι γνωστό πῶς τό ἐνδιαφέρον τῆς μελέτης τών κυλινδρικῶν κυματοδηγῶν ἀνανεώθηκε θεαματικά τά τελευταῖα χρόνια ἐξαιτίας τοῦ ὅτι γίνεται ὅλο καί πιά εὐρύτερη χρήση τών κυματοδηγῶν φωτός (optical fibers).

Παρόλο πού ὄέν ἔγινε δυνατό, στήν πρώτη αὐτή ἐκδόση, νά συμπεριληφθεῖ ή μελέτη τέτοιων ὀπτικῶν κυματοδηγῶν, δόθηκε ἰδιαίτερη ἐμφαση στή θεωρητική μελέτη τών κυκλικῶν κυλινδρικῶν κυματοδηγῶν. Στό θέμα αὐτό ἀφιερώθηκε καί ἓνα "παράρτημα".

Ἡ φυσιολογική συμπλήρωση τοῦ κεφαλαίου 5 γίνεται μέ τή μελέτη ἡλεκτρομαγνητικῶν ἀντηχεῖων. Περιοριστήκαμε στή μελέτη τών "στάσιμων κυματικῶν τύπων" σέ δύο μόνο μορφές ἀντηχεῖων: τό ὀρθογώνιο καί τό κυλινδρικό. Ἡ μελέτη, ὅμως, ἔγινε μέ τρόπο πού ἐπιτρέπει τή γενί-

κευση καί στο τέλος του κεφαλαίου υποδείχεται τό ενδιαφέρον άλλων πρακτικῶν μορφῶν ἀντηχείων γιά τίς μικροκυματικές διατάξεις καθώς καί ὁ τρόπος σύζευξής τους μέ "γραμμή μεταφοῶς" γιά τή διέγερση ἢ τήν ἀπαγωγή ἐνέργειας.

Στό κεφάλαιο 6 ἐπιχειρεῖται ἡ ἀπλοποιημένη μελέτη ἐνός δύσκολου θέματος: τῆς διάδοσης ΗΜ κύματος μέσα ἀπό ἰονισμένο μέσο παρουσία μαγνητικοῦ πεδίου (ψυχρό μαγνητόπλασμα). Ἀποδείχεται, ἀρχικά, ὅτι ἡ εὐκίνησις καί ἐπομένως καί ἡ εἰδική ἀγωγιμότητα σ στο μέσο αὐτό εἶναι τανυστικά μεγέθη. Ἀπό τίς ἐξισώσεις τοῦ Maxwell προκύπτει ὅτι τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τήν "ἐνεργό διηλεκτρική σταθερά" ε καί ἐπομένως καί γιά τό δείκτη διάθλασης n τοῦ ὕλικου δηλ. τό ὕλικό εἶναι ἀνισότροπο.

Ἀπό τή διερεύνηση τῶν τανυστῶν σ καί ϵ γιά διάφορες τιμές τῆς συχνότητος ω τοῦ κύματος καί τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου B , προκύπτουν πολύ χρήσιμα συμπεράσματα γιά τίς συνθήκες πού εὐνοοῦν τήν ἐκδήλωση γνωστῶν φαινομένων μεγάλου ἐνδιαφέροντος (φαινόμενο Hall, γυρομαγνητικός συντονισμός, μαγνητοαντίσταση, ἀποκοπή πλάσματος). Παράλληλα, ἡ διατύπωση τῆς ἐξίσωσης διασποῶς (dispersion relation) καί ἡ διερεύνηση τῆς σταθερᾶς διάδοσης ἐνός ἐπίπεδου μονοχρωματικοῦ κύματος (ω, k), ὁδηγεῖ σέ κλασικά ἀποτελέσματα γιά τήν δυνατότητα διάδοσης ΗΜ-κύματος κατὰ τίς διάφορες, ἀναφορικά μέ τό B , διευθύνσεις (κυρίως τή "διαμήκη" καί τήν "ἐγκάρσια"). Προκύπτουν, ἔτσι, οἱ δυνατότες μορφές διάδοσης τοῦ κύματος ("τακτική" καί "ἐκτακτη" ἀκτίνα). Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ὅλη διαπραγμάτευση ἔχει ἄμεση ἐφαρμογή στή συμπεριφορὰ τῆς ἰονόσφαιρας κατὰ τήν πρόσπτωση ΗΜ κύματος, ἀλλά καί μεγάλο ἐνδιαφέρον γιά τή μελέτη τῆς στροφῆς τοῦ ἐπίπεδου πόλωσης τοῦ κύματος πού περνᾷ μέσα ἀπ' αὐτήν, φαινομένου γνωστοῦ σάν στροφή Faraday. Ἡ μελέτη ἀκριβῶς τῆς στροφῆς Faraday γίνεται, σέ ἀρκετή ἔκταση, στο τέλος τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ.

Τό 7ο, τελευταῖο κεφάλαιο, εἶναι ἀφιερωμένο στή μελέτη τῆς πόλωσης τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος, ὅπου χρησιμοποιήσαμε βασικά τήν πολύ εὐληπτή μεθοδολογία πού ἀκολουθεῖ ὁ Kraus. Ἀφοῦ εἰσαχθεῖ ἡ ἐννοια τῆς πόλωσης καί ὀριστοῦν οἱ "γεωμετρικές" τῆς παράμετροι, γίνεται μιᾶ ἀρχική μελέτη τῆς "ὀλικῆς" ἐλλειπτικῆς πόλωσης, θεωρημένης σάν ἐπαλληλίας εἴτε δύο γραμμικά πολωμένων κυμάτων εἴτε δύο κυκλικά πολωμένων κυμάτων.

Δείχεται ὅτι ἀρκεῖ ἓνα σημεῖο ἐπάνω στήν ἐπιφάνεια τῆς "σφαίρας τοῦ Poincaré" γιά νά περιγραφεῖ τέλεια τό εἶδος τῆς ὀλικῆς πόλωσης, σ' ὁποιαδήποτε περίπτωση.

Ἐξετάζεται ὕστερα τό "μερικό πολωμένο κύμα" καί ὀρίζονται οἱ τέσσερις παράμετροι τοῦ Stokes ἢ ὅπως λέμε, τό διάνυσμα Stokes \vec{S} , πού καθορίζει μονοσήμαντα τό πολωμένο κύμα. Τονίζεται ἰδιαίτερα ἡ σημαντική "γραμμική" ιδιότητα, σύμφωνα μέ τήν ὁποία ὅταν ἔχουμε ἐπαλληλῶς πολλῶν, ἀνεξάρτητων μεταξύ τους, πολωμένων κυμάτων, τό τελικό κύμα πού προκύπτει, ἔχει διάνυσμα Stokes ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων Stokes τῶν ἐπιμέρους κυμάτων.

Στή συνέχεια, γίνεται ἡ περιγραφή τῶν χαρακτηριστικῶν πόλωσης

μιάς κεραίας, με τη βοήθεια ενός διανύσματος (ή μήτρας-στήλης) ανάλογου με το διάνυσμα \vec{S} , και δείχνεται ότι η ισχύς που παίρνει τελικά μία κεραία λήψης, από ένα πολωμένο κύμα, είναι το έσωτερικό γινόμενο των παραστατικών διανυσμάτων της κεραίας και του κύματος. Προκύπτει έτσι άμεσα οι συνθήκες προσαρμογής (ή άριστης σύζευξης) μεταξύ κεραίας και κύματος.

Στο τέλος του κεφαλαίου γίνεται γενίκευση προς την οπτική με τον όρισμό (από τις παραμέτρους Stokes) της "μήτρας συνεκτικότητας" (coherency matrix) και το κεφάλαιο κλείνει με τη μελέτη του μετασχηματισμού, που θα υποστεί το διάνυσμα \vec{S} ενός κύματος, κατά τη διέλευσή του μέσα από ένα "γραμμικό υλικό (ή διάταξη), του οποίου η "συνάρτηση μεταφοράς" δίνεται από μία "μήτρα Mueller".

Μετά το θεωρητικό μέρος, έχουν παρατεθεί 108 προβλήματα, σε σειρά που αντιστοιχεί στα επτά θεωρητικά κεφάλαια. Τα προβλήματα διαλέχθηκαν έτσι, ώστε όχι μόνο να βοηθήσουν τον αναγνώστη να πάρει μια καλή γεύση εφαρμογών, αλλά και να εμπεδώσουν το θεωρητικό μέρος, και να το συμπληρώσουν σε πολλά σημεία. Τα προβλήματα είναι είτε τελείως λυμένα είτε συνοδεύονται από τις απαντήσεις τους.

Δυό λόγια για τις Μονάδες: Τόσο στη θεωρία όσο και στα προβλήματα, ακολουθήσαμε το Διεθνές Σύστημα Μονάδων SI (Système International), στο οποίο άλλωστε τείνει να συμμορφωθεί, σε διεθνή κλίμακα, κάθε νέα επιστημονική έκδοση.

Ο πρώτος από μας θα ήθελε να ευχαριστήσει θερμά το Ραδιοηλεκτρολόγο Φυσικό Σωτήρη Καρρά για την πρακτική δουλειά που έκανε σαν σπουδαστής του Μεταπτυχιακού Ένδεικτικού, καθαρογράφοντας τις σημειώσεις σε μία πρώτη φάση.

ΑΘΗΝΑ, 'Απρίλης 1979

Κ.ΚΑΡΟΥΜΠΑΛΟΣ Κ.ΒΑΛΕΟΝΤΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελίδα
ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	III
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ.....	1
1.1. Όρθογώνια Συστήματα Συντεταγμένων.....	1
1.2. Διανυσματικοί Τελεστές.....	4
1.3. Θεωρήματα Gauss και Stokes.....	7
1.4. Ο Διανυσματικός Τελεστής "Ανάδελτα".....	7
1.5. Φυσική σημασία των grad , div , rot και ∇^2	9
1.5.1. Βαθμίδα (grad).....	9
1.5.2. Απόκλιση (div).....	11
1.5.3. Στροβιλισμός (rot).....	13
1.5.4. Λαπλασιανή (∇^2).....	15
1.6. Μερικές Ιδιότητες και Σχόλια.....	15
1.7. Πότε γνωρίζουμε τέλεια ένα πεδίο.....	19
1.8. Χρονική περιγραφή - Μιγαδικές εκφράσεις των Αρμονικών Πεδίων.....	19
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ MAXWELL.....	22
2.1. Κλασικοί φυσικοί νόμοι που όδηγησαν στις εξισώσεις του Maxwell.....	22
2.1.1. Νόμος του Ampère.....	22
2.1.2. Νόμος του Faraday.....	22
2.1.3. Νόμος του Gauss για την ηλεκτρική διέγερση \vec{D}	23
2.1.4. Νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο \vec{B}	23
2.1.5. Νόμος του Ohm.....	23
2.2. Οι εξισώσεις του Maxwell.....	24
2.2.1. Πρώτη εξίσωση του Maxwell.....	24
2.2.2. Δεύτερη εξίσωση του Maxwell.....	25
2.2.3. Τρίτη εξίσωση του Maxwell.....	26
2.2.4. Τέταρτη εξίσωση του Maxwell.....	27
2.3. Η εξίσωση της συνέχειας.....	27
2.4. Οι εξισώσεις του Maxwell όταν τα πεδία είναι αρμονικά.....	30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΤΟ ΜΟΝΟΜΕΤΡΟ ΚΑΙ ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΕΔΙΟΥ.....	31
3.1. Όρισμοί.....	31
3.2. Εξισώσεις πεδίου διατυπωμένες με τα δυναμικά.....	32
3.3. Εξισώσεις των πεδίων \vec{E} και \vec{B}	36
3.4. Εξισώσεις των δυναμικών \vec{A} και ϕ και των πεδίων \vec{E} και \vec{B} όταν αυτά είναι αρμονικά.....	38
3.5. Εφαρμογή στη διάδοση επίπεδου μονοχρωματικού κύματος.....	39
3.5.1. Σε μέσο χωρίς απώλειες ($\sigma = 0$, ή $\sigma \ll \omega\epsilon$).....	41
3.5.2. Σε μέσο με μεγάλη αγωγιμότητα ($\sigma \gg \omega\epsilon$).....	41
3.6. Γενίκευση της λύσης επίπεδου κύματος.....	44
3.7. Διατήρηση της Ενέργειας-Θεώρημα του Poynting.....	47
3.7.1. Γενική περίπτωση.....	47
3.7.2. Περίπτωση Αρμονικών Πηγών και Πεδίων.....	51
3.7.3. Μιγαδική Ισχύς-Μιγαδικό διάνυσμα Poynting....	54

3.8.	Λύση τῶν μὴ Ὁμογενῶν Ἐξισώσεων.....	55
3.8.1.	Στατικά Δυναμικά.....	55
3.8.2.	Χρονικά μεταβαλλόμενα Δυναμικά-Καθυστερημένα Δυναμικά.....	58
3.9.	Ἀκτινοβολία Στοιχειώδους Ἡλεκτρικοῦ Διπόλου.....	60
3.10.	Ἀκτινοβολία Στοιχειώδους Μαγνητικοῦ Διπόλου.....	68
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4:	ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.....	75
4.1.	Κάθετες συνιστώσες τῶν \vec{D} , \vec{E} , \vec{H} καὶ \vec{B}	75
4.2.	Ἐφαπτομενικές συνιστώσες τῶν \vec{H} , \vec{B} , \vec{E} καὶ \vec{D}	77
4.3.	Εἰδικές περιπτώσεις.....	81
4.3.1.	Ὁριακές συνθήκες στὴν Ἐπιφάνεια μεταξύ δύο καλῶν διηλεκτρικῶν.....	81
4.3.2.	Ὁριακές συνθήκες στὴν ἐπιφάνεια τέλειων Ἀγωγῶν.....	81
4.4.	Συνοπτικός Πίνακας ὁριακῶν συνθηκῶν.....	83
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5:	ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ.....	84
5.1.	Εἰσαγωγή.....	84
5.2.	Μελέτη Ὀρθογώνιου Κυματοδηγοῦ.....	87
5.2.1.	Ἐγκάρσιος Ἡλεκτρικός Κυματικός Τύπος (TE).....	91
5.2.2.	Ἐγκάρσιος Μαγνητικός Κυματικός Τύπος (TM).....	101
5.2.3.	Μερικά Πρακτικά Συμπεράσματα.....	102
5.2.4.	Ἐξασθένιση τοῦ κύματος κατὰ τὴ διάδοση μέσα σὲ ὀρθογώνιο κυματοδηγό (βασικές σχέσεις).....	106
5.3.	Μελέτη Κυκλικοῦ κυλινδρικοῦ κυματοδηγοῦ.....	108
5.3.1.	Κυματικός τύπος TM.....	111
5.3.2.	Κυματικός τύπος TE.....	113
5.3.3.	Ἐξασθένιση τοῦ κύματος κατὰ τὴ διάδοση μέσα ἀπὸ κυκλικό κυλινδρικό κυματοδηγό.....	114
5.4.	Τρόποι διέγερσης καὶ λήψης τοῦ σήματος στοὺς κυματοδηγούς.....	118
5.5.	Ἡλεκτρομαγνητικά Ἀντηχεῖα.....	119
5.5.1.	Τὸ ὀρθογώνιο Ἡλεκτρομαγνητικό Ἀντηχεῖο.....	119
5.5.2.	Τὸ κυκλικό Ἡλεκτρομαγνητικό Ἀντηχεῖο.....	121
5.5.3.	Σύζευξη Ἀντηχεῖου μέ Γραμμὴ Μεταφορᾶς.....	130
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6:	ΔΙΑΔΟΣΗ ΜΕΣΑ ΣΕ ΙΟΝΙΣΜΕΝΟ ΜΕΣΟ.....	131
6.1.	Τανυστές τῆς εὐκίνησias καὶ τῆς εἰδικῆς ἀγωγιμότητας τοῦ ἰονισμένου μέσου παρουσία Μαγνητικοῦ Πεδίου.....	132
6.2.	Ὁ τανυστὴς τῆς διηλεκτρικῆς σταθερᾶς.....	139
6.3.	Σταθερά τῆς διάδοσης καὶ δείκτης διάθλασης.....	173
6.4.	Στροφή Faraday.....	150
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7:	ΠΟΛΩΣΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ.....	155
7.1.	Ὀλικά πολωμένο κύμα.....	155
7.2.	Ἡ σφαῖρα τοῦ Poincaré.....	158
7.3.	Ἀπόκριση κεραίας σὲ ὀλικά πολωμένο κύμα.....	160
7.4.	Μερικά πολωμένο κύμα. Παράμετροι Stokes.....	162
7.4.1.	Παράμετροι Stokes γιὰ ὀλικά πολωμένο κύμα.....	163
7.4.2.	Παράμετροι Stokes γιὰ μερικά πολωμένο καὶ γιὰ τελείως ἀπόλωτο κύμα.....	167
7.5.	Παραστατική μήτρα πόλωσης μιᾶς κεραίας-Ἀπόκριση κεραίας σὲ μερικά ἢ ὀλικά πολωμένο κύμα.....	173
7.6.	Γενίκευση τῆς περιγραφῆς μέ μῆτρες-Μήτρα συνεκτικότητας.....	176
7.7.	Μετασχηματισμὸς τοῦ διανύσματος Stokes ἐνὸς κύματος κατὰ τὴ διέλευσή του μέσα ἀπὸ γραμμικὴ διάταξη-Mῆτρες Mueller.....	179
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....		183
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.....		193
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....		313

1. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ.

1.1. Όρθογώνια Συστήματα Συντεταγμένων.

Κάθε σημείο P μπορεί να οριστεί από την τομή τριών επιφανειών:

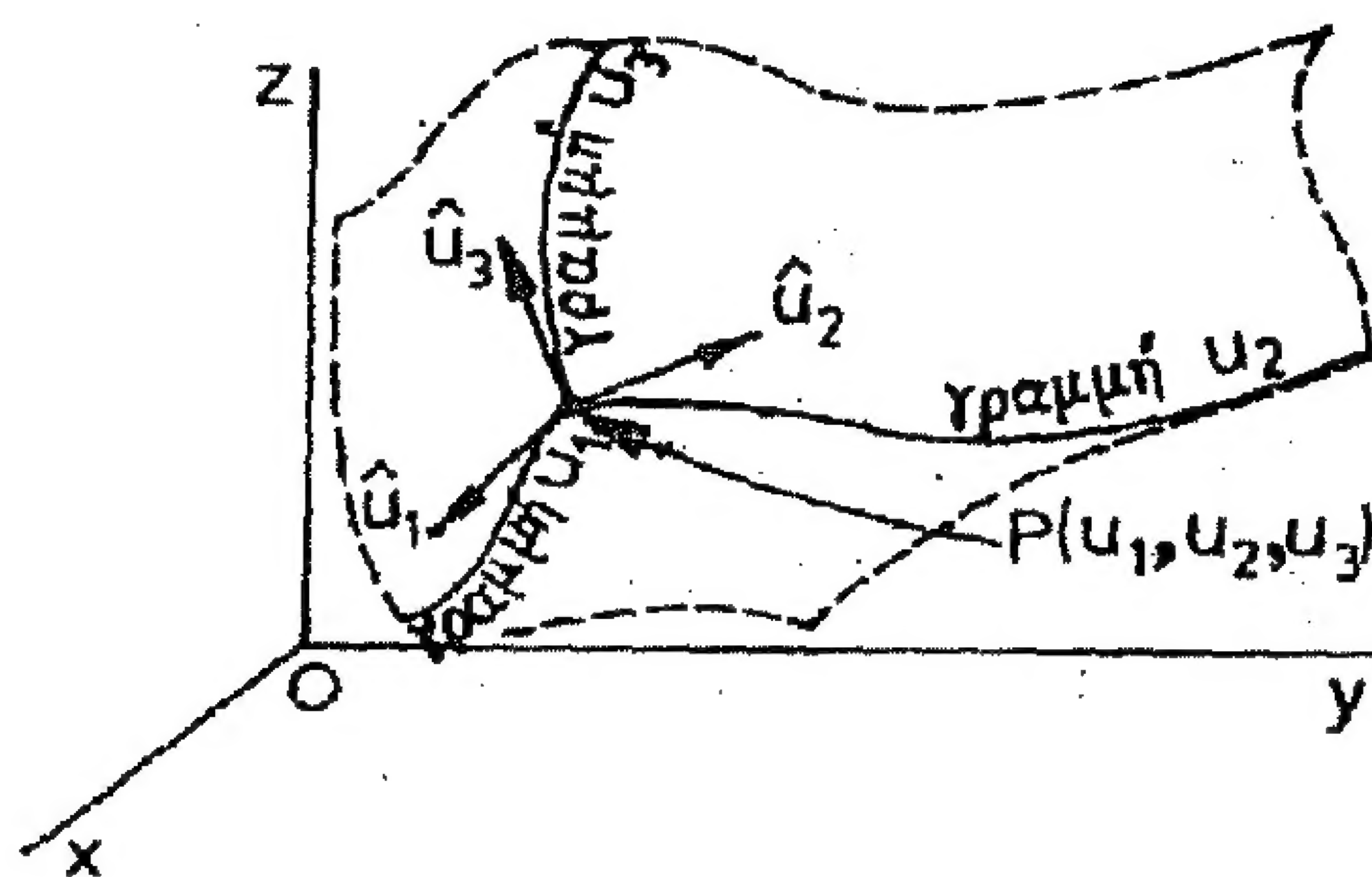
$$f_1(x,y,z) = u_1 = \text{σταθερά}$$

$$f_2(x,y,z) = u_2 = \text{σταθερά}$$

$$f_3(x,y,z) = u_3 = \text{σταθερά}$$

Οι επιφάνειες αυτές ονομάζονται συντεταγμένες επιφάνειες και οι τομές τους ανά δύο συντεταγμένες γραμμές. "Αν μάλιστα οι γραμμές αυτές τέμνονται κάθε-

τα τότε σύστημα λέγεται όρθογώνιο.



Σχ. 1-1. Σύστημα καυκυλόγραμμων συντεταγμένων

"Αν \vec{r} είναι το διάνυσμα θέσης ενός σημείου $P = P(u_1, u_2, u_3)$ τότε το διάνυσμα $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$ εφάπτεται στη συντεταγμένη γραμμή u_i στο σημείο P και δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = h_i \hat{u}_i \quad \text{για } i=1,2,3 \quad (1-1)$$

όπου \hat{u}_i το μοναδιαίο διάνυσμα πάνω στη γραμμή u_i που δίνεται από τη σχέση :

$$\hat{u}_i = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right|} \quad (1-2)$$

καί h_i οί συντελεστές κλίμακας έτσι πού :

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i} \right)^2} \quad (1-3)$$

Παρατήρηση:

Τά μοναδιαία διανύσματα \hat{u}_i αλλάζουν γενικά διεύθυνση από σημείο σέ σημείο. Μόνο στό καρτεσιανό ορθογώνιο σύστημα $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ έχουν σταθερή κατεύθυνση σέ κάθε σημείο του χώρου.

Γιά τό ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα

Οί συντεταγμένες έπιφάνει-
ες πού ορίζουν τό σημείο
 $P(x, y, z)$ είναι τά επίπεδα

$$x = \text{σταθ.}$$

$$y = \text{σταθ.}$$

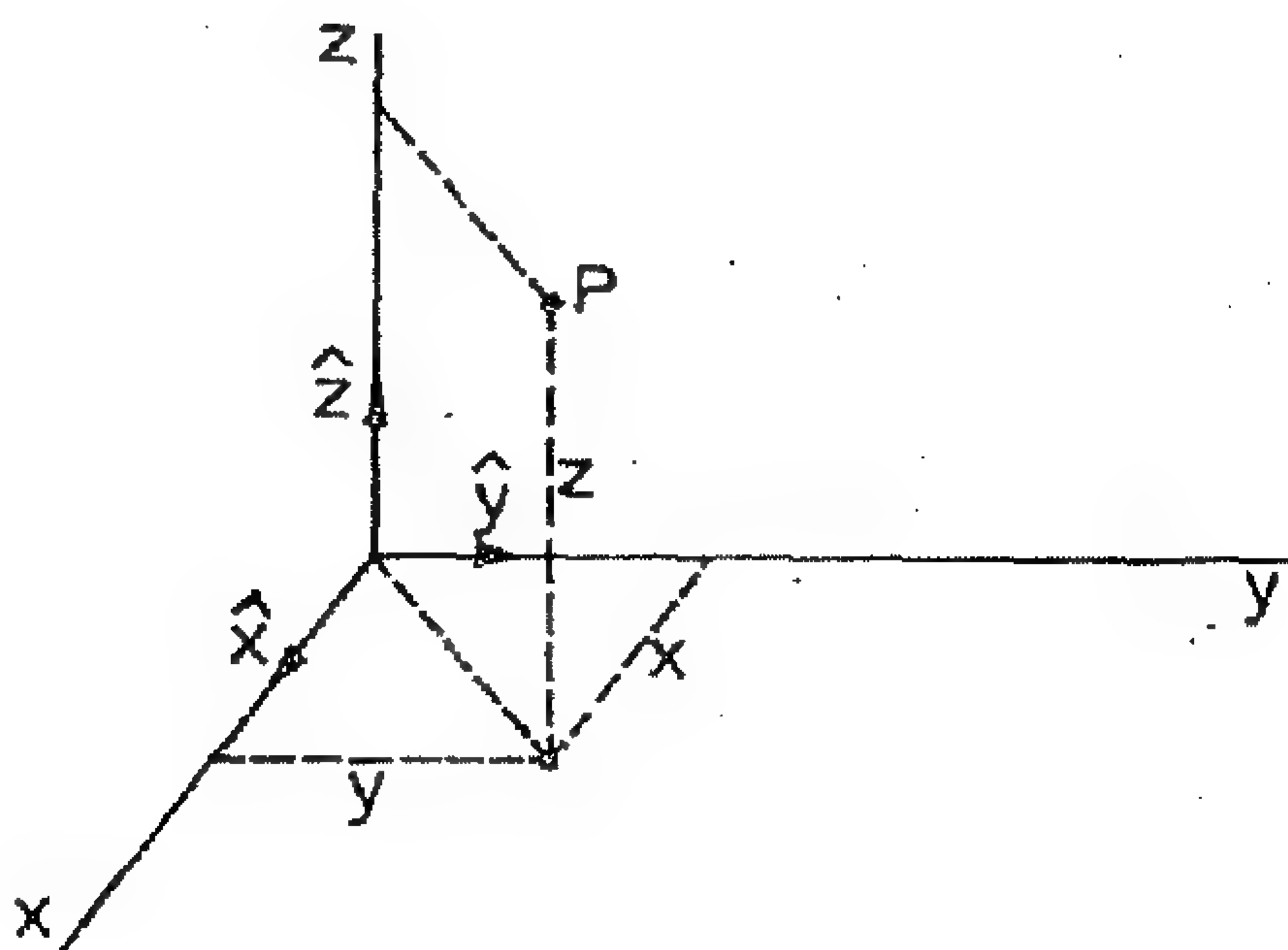
$$z = \text{σταθ.}$$

Μοναδιαία διανύσματα είναι
τά:

$$\hat{u}_1 = \hat{x}, \quad \hat{u}_2 = \hat{y}, \quad \hat{u}_3 = \hat{z}$$

μέ συντελεστές κλίμακας

$$h_x = h_y = h_z = 1$$

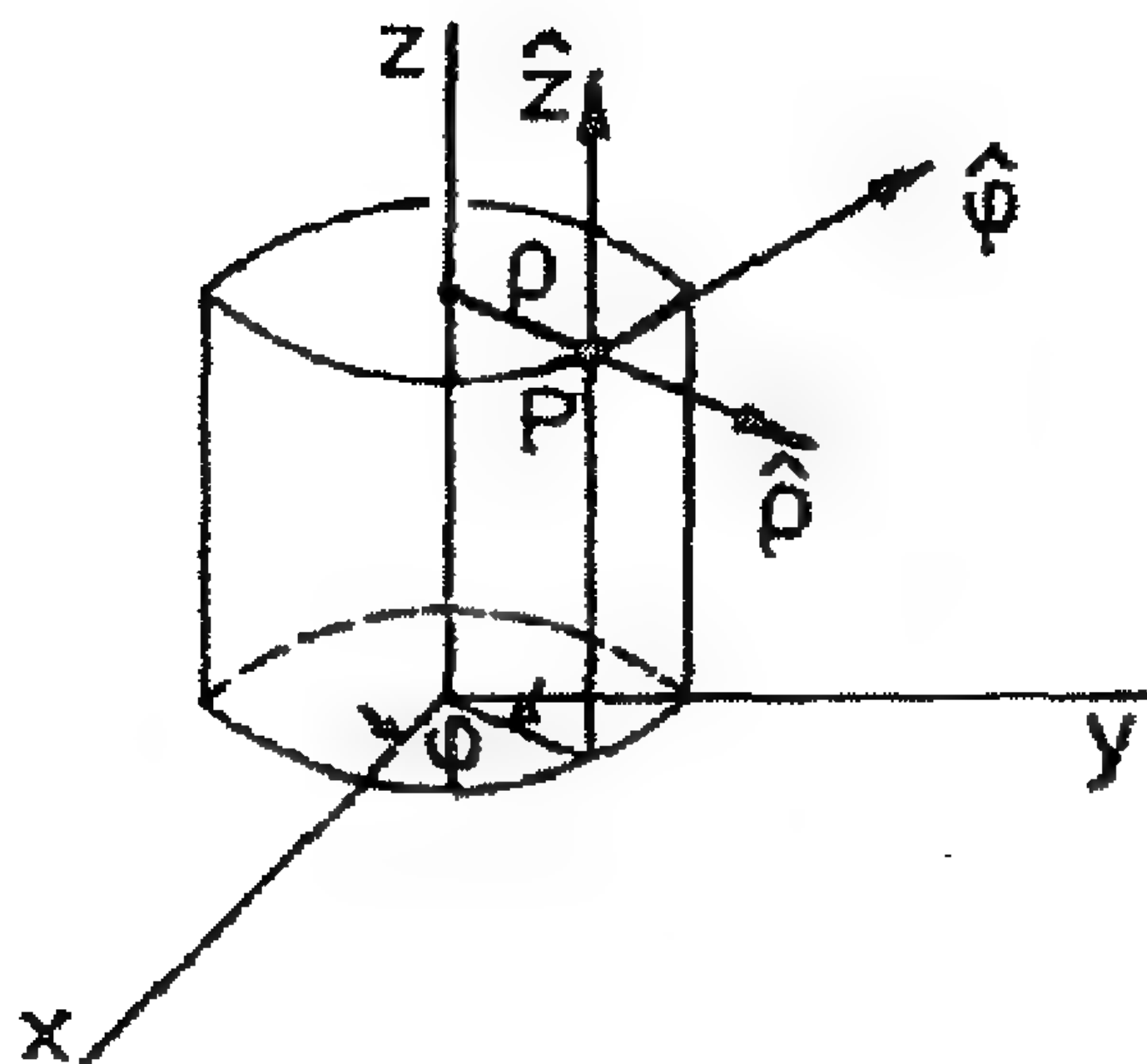


Σχ. 1-2. Ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα

Γιά τό κυλινδρικό σύστημα

Οί συντεταγμένες έπιφάνειες πού ορίζουν τό σημείο $P(\rho, \varphi, z)$ είναι :

- (i) Ένας ὀρθός κυκλικός κύλινδρος μέ ἀκτίνα $\rho = c_1$ καί ἄξονα τόν z .
- (ii) Ένα ἐπίπεδο $\varphi = c_2$ πού περνᾷ ἀπό τόν ἄξονα τῶν z .
- (iii) Ένα ἐπίπεδο $z = c_3$ κάθετο στόν ἄξονα τῶν z . Οἱ συντελεστές κλίμακας εἶναι:
- $$h_\rho = 1 \quad h_\varphi = \rho \quad h_z = 1$$



Σχ. 1-3. Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

Γιὰ τό σφαιρικό σύστημα

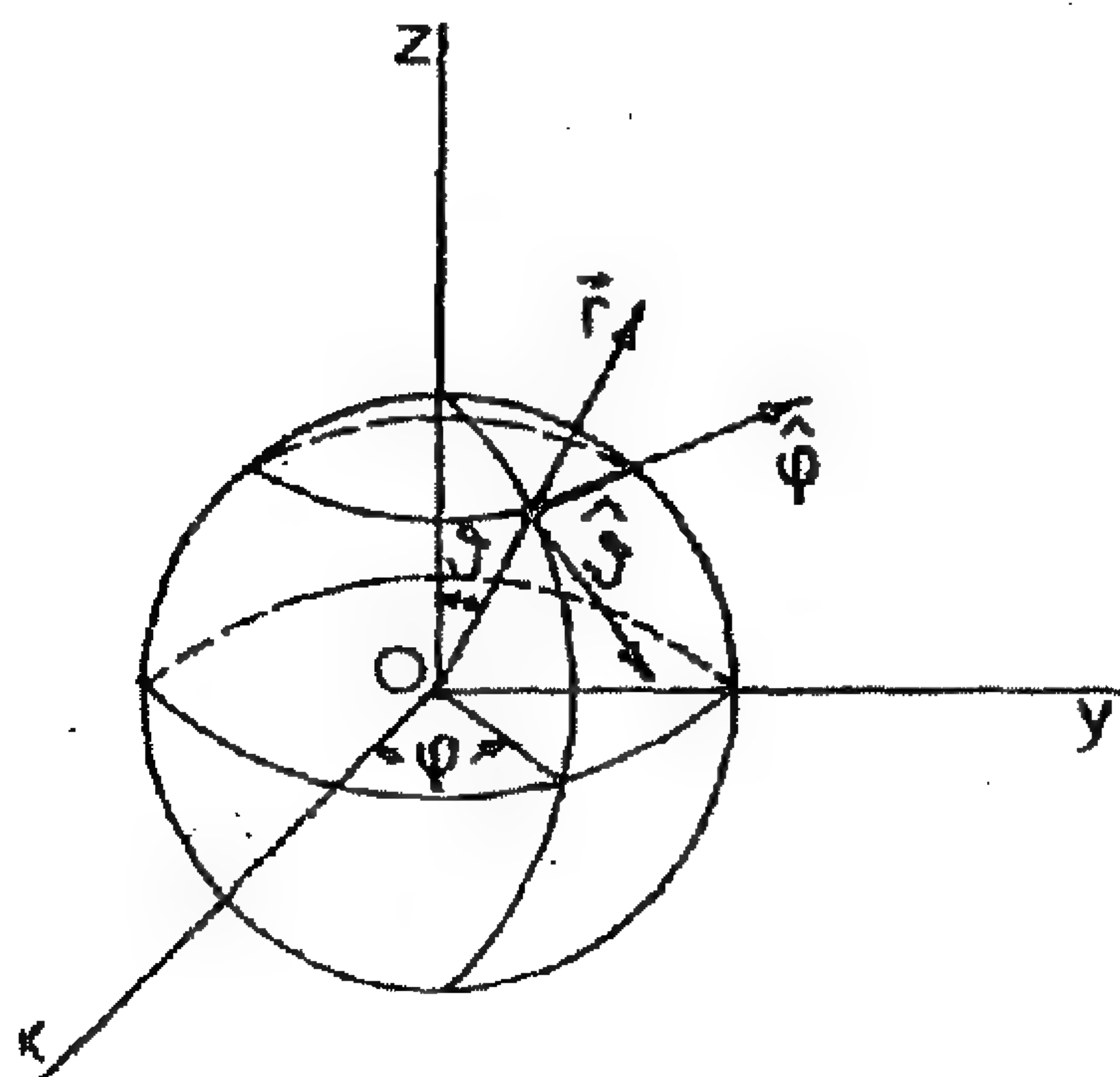
Οἱ συντεταγμένες ἐπιφάνειες πού ὀρίζουν τό σημείο $P(r, \vartheta, \varphi)$ εἶναι :

- (i) $r = c_1$ σφαῖρα μέ κέντρο τήν ἀρχή O .
- (ii) $\vartheta = c_2$ κῶνος μέ κορυφή τό O .
- (iii) $\varphi = c_3$ ἐπίπεδο πού περνᾷ ἀπό τόν ἄξονα z .

Οἱ συντελεστές κλίμακας εἶναι :

$$h_r = 1, \quad h_\vartheta = r,$$

$$h_\varphi = r \sin \vartheta.$$



Σχ. 1-4. Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

Έκφραση τῶν στοιχείων μήκους, ἐπιφάνειας καί ὀγκοῦ

“Αν ἡ συντεταγμένη u_i μεταβληθεῖ κατὰ τή διεύθυνση \hat{u}_i κατὰ

du_i , τό μέτρο τῆς ἀντίστοιχης μετατόπισης dl_i πάνω στή συντεταγμένη γραμμή u_i εἶναι :

$$dl_i = h_i du_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (1-4)$$

καί τό στοιχεῖο μήκους dl γιά ἓνα ὀρθογώνιο σύστημα :

$$dl^2 = dl_1^2 + dl_2^2 + dl_3^2 \quad (1-5)$$

Οἱ προβολές τοῦ στοιχείου ἐπιφάνειας dS πάνω στίς συντεταγμένες ἐπιφάνειες εἶναι :

$$\begin{aligned} dS_1 &= dl_2 dl_3 = h_2 h_3 du_2 du_3 \\ dS_2 &= dl_3 dl_1 = h_3 h_1 du_3 du_1 \\ dS_3 &= dl_1 dl_2 = h_1 h_2 du_1 du_2 \end{aligned} \quad (1-6)$$

καί τό στοιχεῖο ὀγκοῦ dV δύνεταί ἀπό τήν σχέση :

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \quad (1-7)$$

1.2.Οἱ Διανυσματικοί Τελεστές.

Ἐστω $U(\vec{r})$ καί $\vec{F}(\vec{r})$ μιά μονόμετρο καί μιά διανυσματική συνάρτηση τῆς θέσης \vec{r} τοῦ σημείου P , $\Delta\psi$ ἡ ροή τῆς \vec{F} ἀπό ἓναν ὀγκο ΔV γύρω ἀπό τό σημείο P , πού περιορίζεται ἀπό τήν κλειστή ἐπιφάνεια ΔS .

Ἡ βαθμύδα τοῦ μονόμετρου πεδίου U (gradient) ὀρίζεται ἀπό τήν σχέση :

$$\text{grad} U = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} U d\vec{S} \quad (1-8)$$

καί κάνει διανυσματοποίηση τοῦ μονόμετρου μεγέθους U . Ὅπως ἀποδείχνεται παρακάτω (παρ. 1.5.1) τό διάνυσμα $\text{grad} U$ βλέπει πρὸς τὰ ἐκεῖ πού τό πεδίο U μεταβάλλεται γρηγορότερα.

Ἡ ἀπόκλιση (divergence) τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου \vec{F} ὀρίζεται μέ τό ὅριο :

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \Psi}{\Delta V} = \frac{d\Psi}{dV} \quad (1-9)$$

καί παριστάνει τή ροή τοῦ πεδίου μέσα ἀπό τήν ἐπιφάνεια πού περικλείει τή μονάδα ὄγκου.

Ὁ σ τ ρ ο β υ λ ι σ μ ό ς (curl, rotation) τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου \vec{F} ὀρίζεται ἀπό τή σχέση :

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} d\vec{S} \times \vec{F} \quad (1-10)$$

καί παριστάνει τήν "κυκλοφορία" τοῦ πεδίου ἀνά μονάδα ἐπιφάνειας.

Π α ρ α τ η ρ ο ῦ μ ε ὅτι οἱ πρὸ πάνω ὀρισμοί ἐνοποιοῦνται μέ τή βοήθεια τοῦ ὀλοκληρωτικοῦ τελεστή

$$\vec{\nabla}_0 \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} d\vec{S}_0 \quad (1-11)$$

ὅπου τό ο παριστάνει (i) ἐσωτερικό (ii) ἐξωτερικό ἢ (iii) κοινό γινόμενο.

Πρὸ κάτω δύνουμε τίς ἀναλυτικές ἐκφράσεις τῶν grad, div καί rot σέ ἓνα γενικευμένο σύστημα ὀρθογώνιων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων :

$$\vec{\nabla} U \equiv \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial l_1} \hat{u}_1 + \frac{\partial U}{\partial l_2} \hat{u}_2 + \frac{\partial U}{\partial l_3} \hat{u}_3 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} \hat{u}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} \hat{u}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial u_3} \hat{u}_3 \quad (1-12)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \equiv \operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (F_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3} (F_3 h_1 h_2) \right\} \quad (1-13)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{rot} \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \begin{vmatrix} h_1 \hat{u}_1 & h_2 \hat{u}_2 & h_3 \hat{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} \quad (1-14)$$

Σημειώνουμε ότι ο ολοκληρωτικός τελεστής $\vec{\nabla}$ μόνο στο ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα έχει αναλυτική διαφορική έκφραση, τέτοια που αν εφαρμοστεί στις πράξεις $\vec{\nabla} U$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ και $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ να μας δώσει τις αντίστοιχες αναλυτικές εκφράσεις των $\text{grad} U$, $\text{div} \vec{F}$ και $\text{rot} \vec{F}$.

Γιαυτό στη πράξη τά ∇U , $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$, $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ χρησιμοποιούνται σαν συμβολισμοί ισοδύναμοι με τους $\text{grad} U$, $\text{div} \vec{F}$, $\text{rot} \vec{F}$ και μόνο στο ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα έχουν την έννοια πράξεων (βλ. και παρ. 1. 4 παρακάτω)

Σάν Λαπλασιανή (Laplacien) ενός μονόμετρου πεδίου U ορίζουμε τό μονόμετρο μέγεθος $\text{div grad} U$ και τό συμβολίζουμε με $\nabla^2 U$. Σε ένα ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων ή Λαπλασιανή το U δύνεται από την έκφραση :

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial u_3} \right) \right\} \quad (1-15)$$

Ανάλογα ορίζεται και ή Λαπλασιανή ενός διανυσματικού πεδίου \vec{F} .

Η Λαπλασιανή ενός διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(\vec{r})$ στο καρτεσιανό σύστημα υπολογίζεται από τή σχέση:

$$\nabla^2 \vec{F} = \hat{x} \nabla^2 F_x + \hat{y} \nabla^2 F_y + \hat{z} \nabla^2 F_z \quad (1-16)$$

ένω στά υπόλοιπα ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων από τή σχέση

$$\nabla^2 \vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{F} \quad (1-17)$$

ή τήν ισοδύναμή της :

$$\nabla^2 \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \vec{F}}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \vec{F}}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \vec{F}}{\partial u_3} \right) \right] \quad (1-18)$$

1.3. Θεωρήματα Gauss και Stokes.

Αν $\vec{A}(\vec{r})$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο αποδεικνύονται τα παρακάτω βασικά θεωρήματα:

$$(α) \quad \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad \text{θεώρημα Gauss} \quad (1-19)$$

μέ τη βοήθεια του οποίου μπορούμε να μετατρέψουμε τριπλό ολοκλήρωμα (όγκου V) σε διπλό (έπιφανειακό πάνω στη κλειστή επιφάνεια S που περιβάλλει τον προηγούμενο όγκο V).

$$(β) \quad \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad \text{θεώρημα Stokes} \quad (1-20)$$

μέ τη βοήθεια του οποίου ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω σε μία επιφάνεια S μετατρέπεται σε επικαμπύλιο πάνω στη κλειστή καμπύλη C που περιορίζει την επιφάνεια.

1.4. Ο Διανυσματικός Τελεστής "Ανάδελτα" (Δεσμευμένος στο Καρτεσιανό Σύστημα).

Στο ορθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, οι εκφράσεις των $\text{grad}U$, $\text{div}\vec{A}$ και $\text{rot}\vec{A}$ έχουν τη μορφή :

$$\text{grad}U = \hat{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial U}{\partial z} \quad (1-21)$$

$$\text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-22)$$

$$\text{rot} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z} \quad (1-23)$$

Στις (1-22) και (1-23) μπορούμε να δώσουμε και τη μορφή :

$$\text{div} \vec{A} = \hat{x} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + \hat{y} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + \hat{z} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \quad (1-24)$$

$$\text{rot} \vec{A} = \hat{x} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + \hat{y} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + \hat{z} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \quad (1-25)$$

Παρατηρούμε ότι αν χρησιμοποιήσουμε το διαφορικό τελεστή $\vec{\nabla}$ να $\vec{\nabla}$ $\delta \epsilon \lambda \tau \alpha$ (τελεστή του Hamilton, del ή nabla) $\vec{\nabla}$, που έχει την καρτεσιανή μορφή :

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-26)$$

οι σχέσεις (1-21), (1-24) και (1-25) παίρνουν τη μορφή :

$$\text{grad} U = \vec{\nabla} U \quad (1-27)$$

$$\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (1-28)$$

$$\text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1-29)$$

Ο τελεστής "ανάδελα" είναι η διαφορική έκφραση, στο καρτεσιανό σύστημα, του ολοκληρωτικού τελεστή $\vec{\nabla}$ που προαναφέραμε, και που στα άλλα συστήματα συντεταγμένων, εκτός από το καρτεσιανό, δεν έχει αντίστοιχη διαφορική έκφραση.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο τελεστής ανάδελα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε άλλους παραστατικούς χώρους, όπως στο χώρο των ταχυτήτων, των όρμων κ.τ.λ. Π.χ. στο χώρο των ταχυτήτων έχουμε ότι :

$$\vec{\nabla}_v = \hat{x} \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial v_z} \quad (1-30)$$

Μπορούμε επίσης νά ὀρίσουμε ἀνάλογους διαφορικούς τελεστές καί σέ χώρους περισσότερων διαστάσεων. Ἐτόν τετραδιάστατο π.χ. χώρο (x.y.z.w) ὀρίζουμε τόν

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} + \hat{w} \frac{\partial}{\partial w} \quad (1-31)$$

καί σέ ἓνα χώρο r διαστάσεων

$$\vec{\nabla} = \sum_i^r \hat{u}_i \frac{\partial}{\partial u_i} \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (1-32)$$

Στό ὀρθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα ἡ Λαπλασιανή τοῦ πεδίου U εἶναι:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1-33)$$

Ἀπό τήν ἔκφραση αὕτη εἶναι φανερό ὅτι ἡ Λαπλασιανή μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν ἐφαρμογή τοῦ μονόμετρου τελεστή

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1-34)$$

πού μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν τό " ἐσωτερικό τετράγωνο " τοῦ τελεστή ἀνάδελτα $\vec{\nabla}$:

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \quad (1-35)$$

1.5. Φυσική σημασία τῶν grad, div, rot καί ∇^2

1.5.1. Βαθμίδα (grad).

"Ἐστω τό μονόμετρο πεδίο $\Phi(\vec{r})$ καί μιά αὐθαίρετη διεύθυνση \hat{n}

Ἡ κατευθυνόμενη παράγωγος τοῦ Φ κατὰ τή διεύθυνση \hat{n} εἶναι:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot \hat{n}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{z} \right) = \vec{\nabla} \Phi \cdot \hat{n} \quad (1-36)$$

Άρα :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \vec{\nabla} \Phi \cdot \hat{n} = |\vec{\nabla} \Phi| \cos \psi \quad (1-37)$$

(βλ. σχ. 1-5)

Άρα η κατευθυνόμενη παράγωγος του πεδίου Φ στη θέση \vec{r} και κατά τη διεύθυνση \hat{n} είναι ίση με την προβολή της βαθμίδας $\vec{\nabla} \Phi$ στο σημείο \vec{r} πάνω στη διεύθυνση \hat{n} .

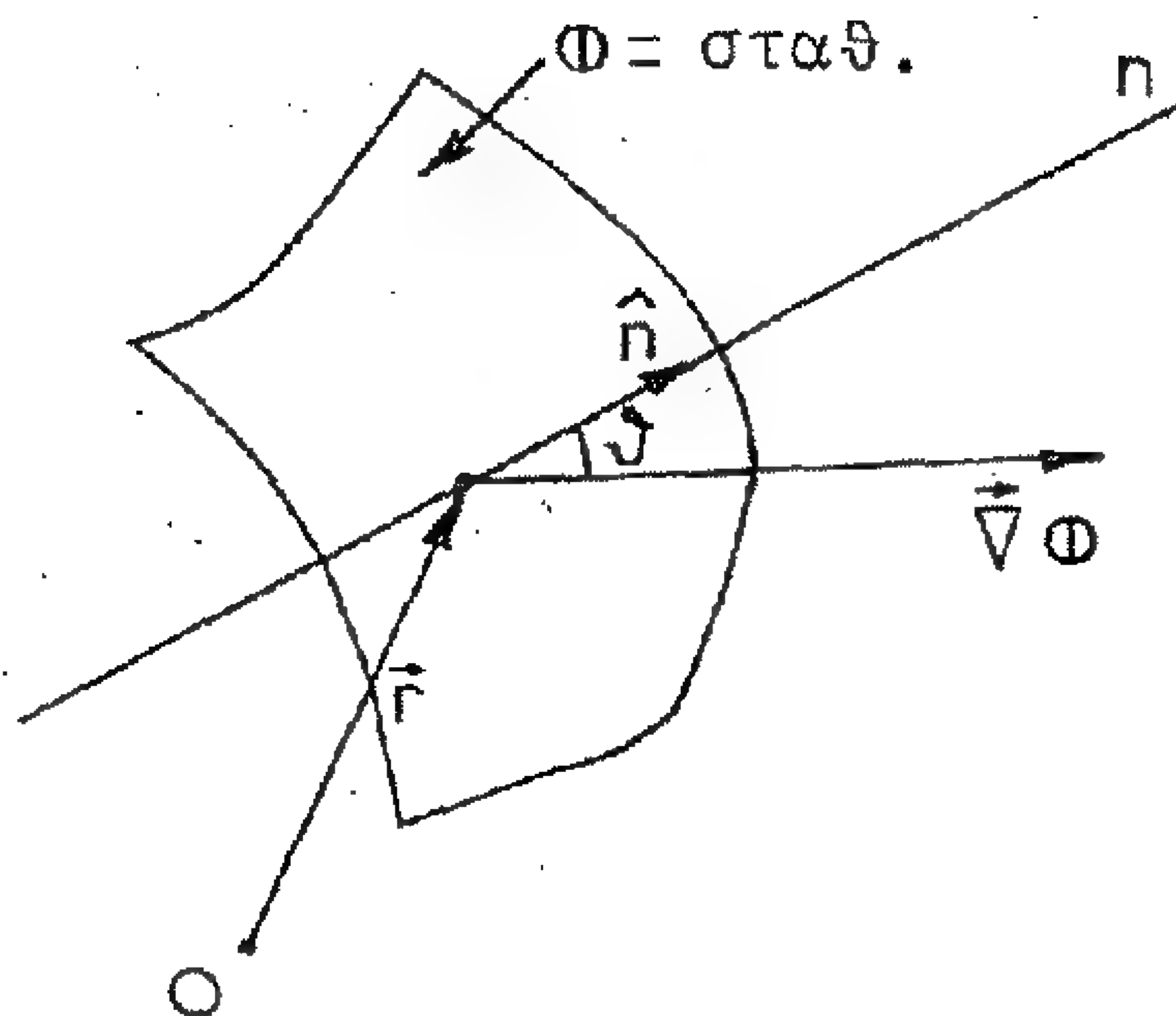
Παρατηρούμε ότι αν αλλά-

ζουμε διευθύνσεις \hat{n} ή $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$

γίνεται μέγιστη όταν $\hat{n} // \vec{\nabla} \Phi$

και
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{\max} = |\vec{\nabla} \Phi|$$

Σχ. 1-5. Η βαθμίδα $\vec{\nabla} \Phi$ είναι διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια $\Phi = \text{σταθ.}$



(1-38)

Άρα η βαθμίδα του Φ ($\vec{\nabla} \Phi$) είναι ένα διάνυσμα που έχει τη διεύθυνση και φορά του μέγιστου ρυθμού μεταβολής του πεδίου Φ και μέτρο ίσο ακριβώς με το μέγιστο αυτό ρυθμό.

Αν από τη θέση \vec{r} θεωρήσουμε μία μετατόπιση $d\vec{r}$ το μονόμετρο πεδίο $\Phi(\vec{r})$ θα γίνει $\Phi + d\Phi$. Όπως ξέρουμε το ολικό διαφορικό $d\Phi$ δίνεται από τη σχέση

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \quad (1-39)$$

που μπορεί να θεωρηθεί ως

$$d\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}) = \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r} \quad (1-40)$$

Άρα το ολικό διαφορικό του πεδίου $\Phi(\vec{r})$ είναι ίσο με το έσωτε-
ρικό γινόμενο της βαθμίδας του επί τη μετατόπιση $d\vec{r}$

Ἡ ἐξίσωση $\Phi(\vec{r}) = \text{σταθ.}$ εἶναι ἡ ἐξίσωση μιᾶς ἐπιφάνειας πάνω στην οποία τό μονόμετρο πεδίο ἔχει σταθερή τιμή (π.χ μιᾶ ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια). Πάνω στην ἐπιφάνεια αὕτη εἶναι $d\Phi=0$ καί ἐπομένως :

$$\vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r} = 0 \quad (1-41)$$

Ὡστε $\vec{\nabla} \Phi \perp d\vec{r}$ καί ἐπειδή τό $d\vec{r}$ ἔχει τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτόμενης στην ἐπιφάνεια προκύπτει, ὅτι ἡ βαθμύδα $\vec{\nabla} \Phi$ εἶναι κάθετη στην ἐπιφάνεια $\Phi(\vec{r}) = \text{σταθ.}$

Καί ἐπομένως τό διάνυσμα

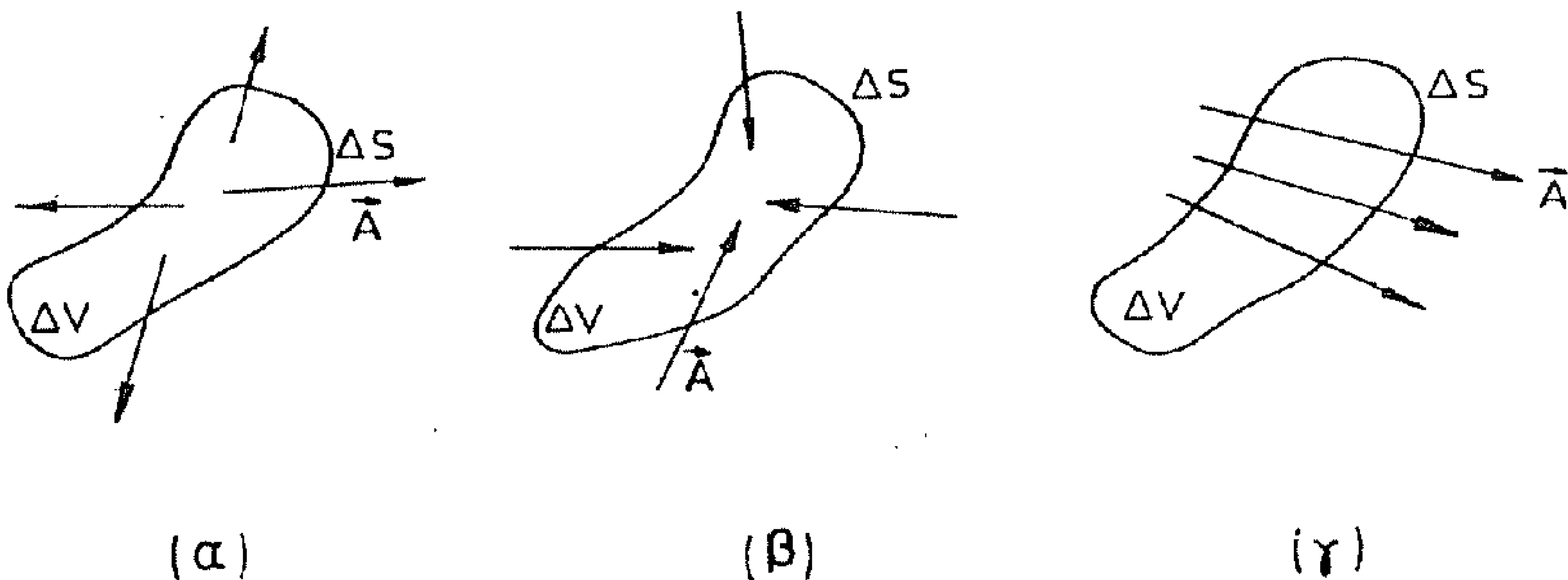
$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla} \Phi}{|\vec{\nabla} \Phi|} \quad (1-42)$$

εἶναι τό μοναδιαῖο διάνυσμα, πού εἶναι κάθετο στην ἐπιφάνεια $\Phi(\vec{r}) = \text{σταθ.}$

1.5.2. Ἀπόκλιση (div).

Ἐστω ἓνα διανυσματικό πεδίο $\vec{A}(\vec{r})$ καί μιᾶ κλειστή ἐπιφάνεια ΔS , πού περικλείει ὄγκο ΔV γύρω ἀπό τό σημεῖο \vec{r} .

Στό σχ.1-6 φαίνονται οἱ τρεῖς περιπτώσεις, πού μπορεῖ νά συμβαίνουν στό σημεῖο \vec{r} .



Σχ. 1-6. Οἱ τρεῖς περιπτώσεις τῆς $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ στην περλοχή ενός σημείου

(α) Παρουσία πηγῆς ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} > 0$)

(β) Παρουσία καταβόθρας ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} < 0$)

(γ) Περιοχή σωληνοειδοῦς πεδίου ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$)

Ἡ απόκλιση τοῦ \vec{A} εἶναι

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \Psi}{\Delta V} = \frac{d\Psi}{dV} \quad (1-43)$$

ἐκφράζει δηλ. τὴν ἔνταση τῆς πηγῆς ἢ καταβόθρας τοῦ πεδίου (ροῆς τοῦ πεδίου) στὴ μονάδα τοῦ ὅγκου στὴ θέσις \vec{r} .

Ἄς πάρουμε σὰν συγκεκριμένο παράδειγμα τὸ πεδίο ταχυτήτων ἑνὸς πληθυσμοῦ σωματιδίων, ποὺ ὑπακούουν στὴν ἐξίσωση τῆς συνέχειας :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = C - \vec{\nabla} \cdot (N\vec{U}) \quad (1-44)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ρυθμός αὐξησης} \\ \text{τῆς πυκνότητας} \\ \text{τῶν σωματιδίων} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{ρυθμός δημιουργίας} \\ \text{νέων σωματιδίων} \\ \text{στὴ μονάδα τοῦ ὅγκου} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{ρυθμός ἐκροῆς} \\ \text{τῶν σωματιδίων} \\ \text{ἀπὸ τῆς μονάδας} \\ \text{τοῦ ὅγκου} \end{array} \right)$$

Στὴ σχέση αὐτὴ ὁ ὅρος $\vec{\nabla} \cdot (N\vec{U})$ ἐκφράζει τὸ ρυθμὸ ἐκροῆς τῶν σωματιδίων ἀπὸ τῆς μονάδας τοῦ ὅγκου. Ἄν δὲν γίνεταί συσσώρευση σωματιδίων τότε $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$ καὶ

$$\vec{\nabla} \cdot (N\vec{U}) = C \quad (1-45)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ρυθμός ἐκροῆς} \\ \text{σωματιδίων} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{ρυθμός δημιουργίας} \\ \text{δηλ. ἔνταση τῆς πηγῆς} \\ \text{παραγωγῆς σωματιδίων} \end{array} \right)$$

Ἄν στὴ περὶοχή ποὺ μελετᾶμε δὲν ὑπάρχει πηγὴ δημιουργίας σωματιδίων ($C = 0$) τότε καὶ

$$\vec{\nabla} \cdot (N\vec{U}) = 0 \quad (1-46)$$

καὶ τὸ πεδίο $N\vec{U}$ εἶναι "σωληνοειδές" δηλ. δὲν ἔχει οὔτε πηγὴ οὔτε καταβόθρα σωματιδίων. Ἡ σχέση αὐτὴ στὴ περίπτωσι ροῆς ἀσυμ-

πύεστου ρευστοῦ ($N = \text{σταθ.}$) γίνεται

$$\vec{V} \cdot \vec{U} = 0 \quad (1-47)$$

1.5.3. Στροβιλισμός (rot).

Έστω ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{A}(\vec{r})$ καί στή θέση \vec{r} ένα στοιχειώδες ἐπιφάνειας $d\vec{S} = dS\hat{n}$ πού ἔχει περίγραμμα C .

Ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα τοῦ Stokes ἔχουμε :

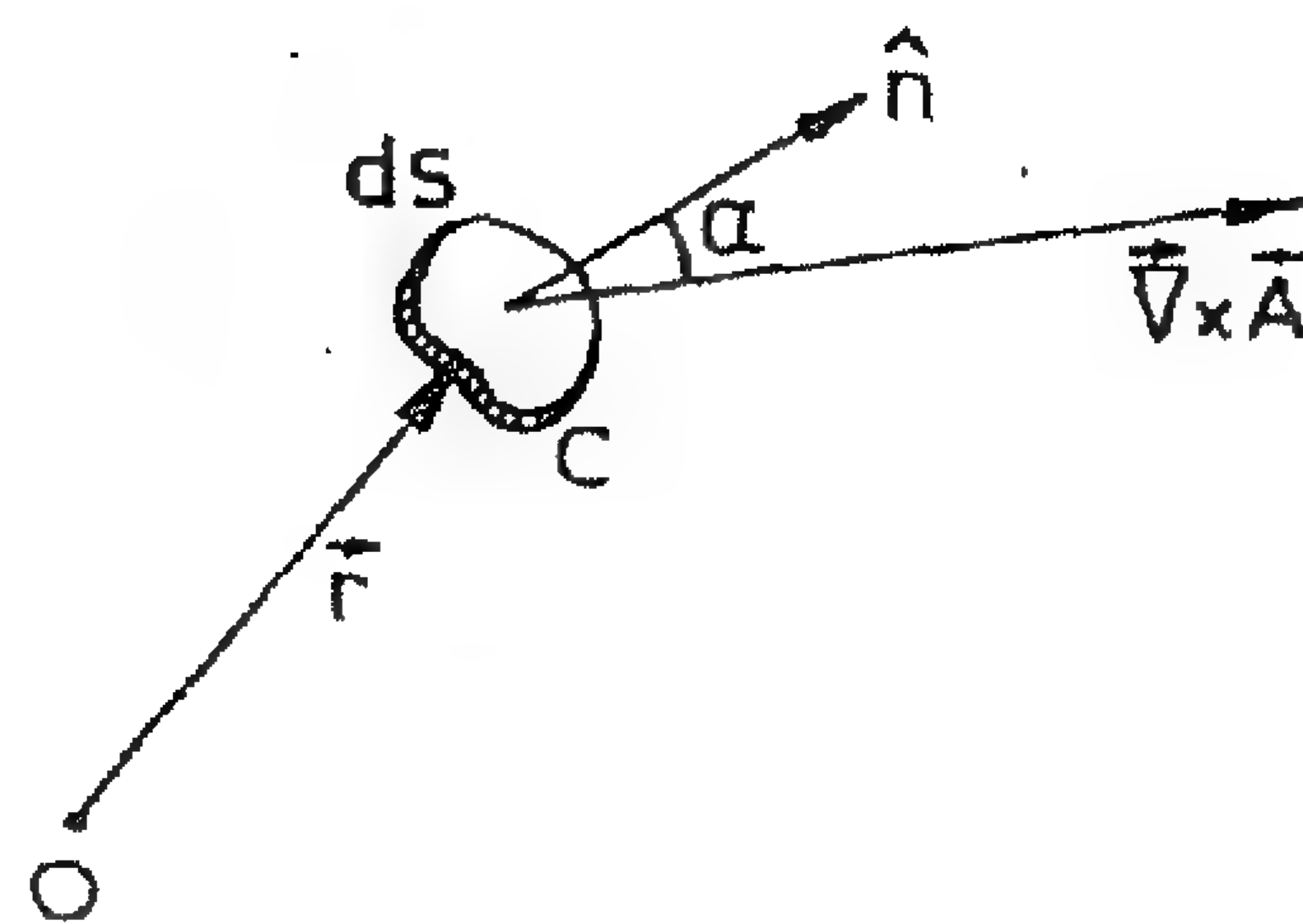
$$(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \hat{n} dS = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = d\Gamma \quad (1-48)$$

ὅπου $d\Gamma$ ἡ "κυκλοφορία" τοῦ \vec{A} πάνω στό περίγραμμα C τοῦ dS .

Ὡστε :

$$|\vec{\nabla} \times \vec{A}| \cos \alpha = \frac{d\Gamma}{dS} \quad (1-49)$$

Τό δεύτερο μέλος τῆς (1-49) εἶναι ἡ "κυκλοφορία" τοῦ πεδίου πάνω στό περίγραμμα C τῆς μονάδας τῆς ἐπιφάνειας, ἐνῶ τό πρῶτο μέλος εἶναι ἡ προβολή τοῦ $\text{rot} \vec{A}$ πάνω στή κάθετο \hat{n} τῆς ἐπιφάνειας.

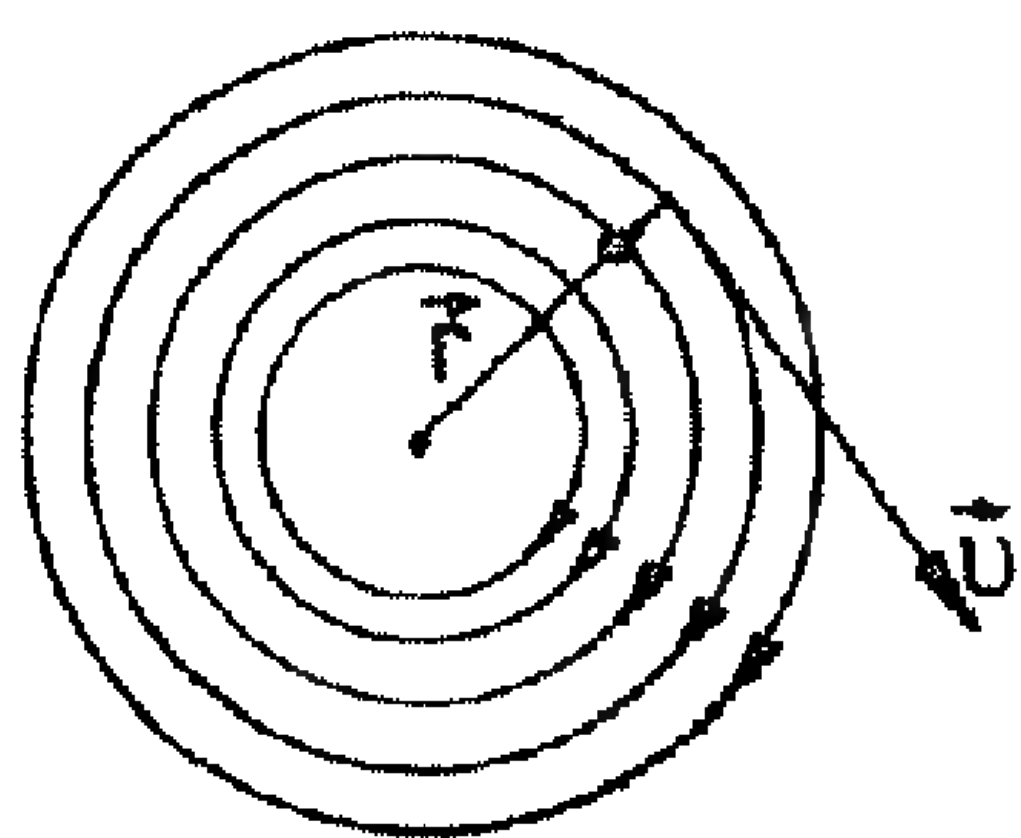


Ἄν θεωρήσουμε \hat{n} παράλληλο μέ τό $\text{rot} \vec{A}$ τότε ἡ κυκλοφορία ἀνά μονάδα ἐπιφάνειας γίνεται μέγλιση :

Σχ.1-7. Ἡ κυκλοφορία τοῦ \vec{A} πάνω στό περίγραμμα C μιᾶς στοιχειώδους ἐπιφάνειας dS γίνεται μέγλιση ἂν ἡ dS προσανατολιστεῖ κάθετα στό $\vec{\nabla} \times \vec{A}$.

$$\left(\frac{d\Gamma}{dS} \right)_{\max} = |\vec{\nabla} \times \vec{A}| \quad (1-50)$$

"Ωστε ο στροβιλλισμός του \vec{A} , σ' ένα σημείο \vec{r} , εκφράζει κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά, τή μέγιστη κυκλοφορία του πεδίου \vec{A} ανά μονάδα επιφάνειας, στο σημείο αυτό.



Σκ. 1-8. Παράδειγμα υπολογισμού rot \vec{V} στην περίπτωση ενός στροβύλου

"Όταν η κυκλοφορία είναι μηδέν τότε μηδενίζεται και ο στροβιλλισμός του

\vec{A} και το πεδίο \vec{A} σ' εκείνη τήν περιοχή του χώρου λέμε ότι είναι αστρόβιλο, ενώ αν η κυκλοφορία και επομένως ο στροβιλλισ-

μός του \vec{A} δεν είναι μηδέν τότε το πεδίο είναι στροβιλό .

"Ας φανταστούμε γι' ένα παράδειγμα

έναν στρόβιλο ενός ρευστού (σχ. 1-8)

πού έχει σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega_x \hat{x} + \omega_y \hat{y} + \omega_z \hat{z}$.

"Εστω \vec{u} η ταχύτητα ενός σημείου του στροβύλου . Είναι

$$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (1-51)$$

όποτε :

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\nabla} \times \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times [(\omega_y z - \omega_z y) \hat{x} - (\omega_x z - \omega_z x) \hat{y} +$$

$$+ (\omega_x y - \omega_y x) \hat{z}] = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (\omega_y z - \omega_z y) & (\omega_z x - \omega_x z) & (\omega_x y - \omega_y x) \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}(\omega_x + \omega_x) + \hat{y}(\omega_y + \omega_y) + \hat{z}(\omega_z + \omega_z) = 2\vec{\omega}$$

(1-52)

"Ωστε :

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = 2\vec{\omega}$$

Από τή σχέση αυτή δικαιολογείται και ή όνομασία "στροβιλισμός".

1.5.4. Λαπλασιανή (∇^2)

"Ας φανταστοῦμε ἕναν κύβο μέ πλευρά α σ' ἕνα σημείο O τοῦ χώρου καί ἄς πάρουμε τήν ἀρχή τοῦ ὀρθογώνιου καρτέσιανου συστήματος στό σημείο αὐτό καί τούς ἄξονες x, y, z , παράλληλους ἀντίστοιχα πρὸς τίς ἀκμές τοῦ κύβου. Ἐστω Φ_0 ή τιμή στή θέση O ἑνὸς μονόμετρου πεδίου $\Phi(\vec{r})$ καί $\bar{\Phi}$ ή μέση τιμή του μέσα στόν κύβο. Μπορεῖ νά ἀποδείξει κανένας ὅτι σέ πρώτη προσέγγιση

$$(\nabla^2 \Phi)_0 \simeq \frac{24}{\alpha^2} (\bar{\Phi} - \Phi_0) \quad (1-53)$$

Δηλ. ή $\nabla^2 \Phi$ σ' ἕνα σημείο, σέ πρώτη προσέγγιση, ἀποτελεῖ ἕνα μέτρο τοῦ πόσο διαφέρει ή τιμή Φ_0 τοῦ πεδίου στή θέση O ἀπό τή μέση τιμή τοῦ Φ στή γειτονιά τοῦ σημείου O .

1.6. Μερικές Ἰδιότητες καί Σχόλια.

(α) Τό ἀνάδελτα ἑνὸς ἀθροίσματος συναρτήσεων θέσης εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀνάδελτα τῶν συναρτήσεων. Δηλαδή :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla}(\Phi_1 + \Phi_2) &= \vec{\nabla}\Phi_1 + \vec{\nabla}\Phi_2 \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_1 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_2 \\ \vec{\nabla} \times (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_1 + \vec{\nabla} \times \vec{A}_2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{γραμμικότητα τοῦ τελεστή } \vec{\nabla} \\ \\ \end{array} \quad (1-54)$$

(β) Τό ἀνάδελτα τοῦ γινομένου δύο συναρτήσεων θέσης σέ ἕνα ὀρισμένο σημείο $P = \Sigma$, εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀνάδελτα τῶν γινομένων πού λαβαῖνουμε ἂν ὑποθέσουμε διαδοχικά σταθερή τή μιά καί τήν ἄλλη συνάρτηση, μέ τιμή τήν τιμή της στό σημείο Σ . Δηλ.

$$\text{grad} (u_1 u_2) = \vec{\nabla} (u_1 u_2) = \vec{\nabla} (\underline{u_1} u_2) + \vec{\nabla} (u_1 \underline{u_2})$$

$$\text{grad} (\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2) = \vec{\nabla} (\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2) = \vec{\nabla} (\underline{\vec{A}_1} \cdot \vec{A}_2) + \vec{\nabla} (\vec{A}_1 \cdot \underline{\vec{A}_2})$$

$$\text{div} (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) = \vec{\nabla} \cdot (\underline{\vec{A}_1} \times \vec{A}_2) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{A}_1 \times \underline{\vec{A}_2}) \quad (1-55)$$

$$\text{rot} (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) = \vec{\nabla} \times (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) = \vec{\nabla} \times (\underline{\vec{A}_1} \times \vec{A}_2) + \vec{\nabla} \times (\vec{A}_1 \times \underline{\vec{A}_2})$$

$$\text{div} (\Phi \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\underline{\Phi} \vec{A}) + \vec{\nabla} \cdot (\Phi \underline{\vec{A}})$$

όπου έχουν υπογραμμιστεί οι όροι που παίρνονται σταθερού.

(γ) Από τό τριπλό γινόμενο

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

προκύπτει:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$

$$\text{div rot } \vec{A} = 0 \quad (1-56)$$

$$(\delta) \text{ Από την σχέση } \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

προκύπτει:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (1-57)$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} \quad (1-58)$$

(ε) Εύκολα αποδείχνουμε διανυσματικά ότι :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi \equiv 0$$

δηλαδή ότι:

$$\text{rot grad } \Phi \equiv 0 \quad (1-59)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-Ι

Έκφραση τῶν Διαγυσματικῶν Τελεστῶν σέ Ὁρθογώνια Συστήματα Συντεταγμένων.

Ὁρθ. Καρτεσιανές	Κυλινδρικές Συντεταγμένες	Σφαιρικές Συντεταγμένες
Συνιστώσες τῆς Βαθμίδας τοῦ $\psi : \vec{\nabla} \psi$		
$(\vec{\nabla} \psi)_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}$	$(\vec{\nabla} \psi)_\rho = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}$	$(\vec{\nabla} \psi)_r = \frac{\partial \psi}{\partial r}$
$(\vec{\nabla} \psi)_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}$	$(\vec{\nabla} \psi)_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$	$(\vec{\nabla} \psi)_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}$
$(\vec{\nabla} \psi)_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}$	$(\vec{\nabla} \psi)_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}$	$(\vec{\nabla} \psi)_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$
Ἡ Ἀπόκλιση τοῦ $\vec{A} : \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$		
$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta A_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
Συνιστώσες τοῦ Στροβιλισμοῦ τοῦ $\vec{A} : \vec{\nabla} \times \vec{A}$		
$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$	$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_\rho = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$	$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial (\sin \vartheta A_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right\}$
$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$	$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_\varphi = \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right)$	$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_\vartheta = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r}$
$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$	$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right\}$	$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_\varphi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial (r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right\}$
Ἡ Λαπλασιανή τοῦ $\psi : \text{div grad} \psi = \nabla^2 \psi$		
$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-Π

Κύριοι Τύποι της Διανυσματικής Ανάλυσης

$$(1) \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{B}, \vec{C}, \vec{A}) = (\vec{C}, \vec{A}, \vec{B}) = \\ = -(\vec{A}, \vec{C}, \vec{B}) = -(\vec{C}, \vec{B}, \vec{A}) = -(\vec{B}, \vec{A}, \vec{C}).$$

$$(2) \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

$$(3) (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{A} \cdot [\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})] = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

$$(4) (\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{D}) \vec{C} - (\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{D}$$

$$(5) \text{grad}(\varphi\psi) \equiv \vec{\nabla}(\varphi\psi) = \varphi \vec{\nabla}\psi + \psi \vec{\nabla}\varphi$$

$$(6) \text{div}(\varphi \vec{A}) \equiv \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla}\varphi + \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$(7) \text{rot}(\varphi \vec{A}) \equiv \vec{\nabla} \times (\varphi \vec{A}) = \varphi \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{\nabla}\varphi$$

$$(8) \text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) \equiv \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$(9) \text{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) \equiv \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \\ = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

$$(10) \text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \equiv \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \\ = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

$$(11) \vec{\nabla}^2 \varphi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi$$

$$(12) \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$(13) \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = \vec{0}$$

$$(14) \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$(15) \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$

$$(16) \int_V (\varphi \vec{\nabla}^2 \psi + \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi) dV = \oint_S \varphi \vec{\nabla} \psi \cdot d\vec{S}$$

$$(17) \int_V (\varphi \vec{\nabla}^2 \psi - \psi \vec{\nabla}^2 \varphi) dV = \oint_S (\varphi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \varphi) \cdot d\vec{S}$$

$$(18) \int_V \vec{\nabla} \varphi dV = \oint_S \varphi d\vec{S}$$

Στούς δύο πίνακες 1-I και 1-II συνοψίζουμε τις εκφράσεις των $\nabla\psi$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$, $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ και $\nabla^2\psi$ στο ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα, στο κυλινδρικό και τό σφαιρικό, καθώς και τούς κυριότερους τύπους της διανυσματικής ανάλυσης.

1.7. Πότε Γνωρίζουμε Τελείως Ένα Πεδίο;

Θά έλεγε κανένας ότι ή γνώση του $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ άρκει για να προσδιορίσουμε τό πεδίο $\vec{A}(\vec{r})$, γιατί ή διανυσματική διαφορική εξίσωση

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{a} \quad (1-60)$$

αναλύεται σε τρεις μονόμετρες διαφορικές εξισώσεις μέ τρεις άγνωστους (A_x , A_y , A_z). Από τις τρεις, όμως, αυτές διαφορικές εξισώσεις οι δύο μόνο είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, γιατί ισχύει ή ταυτότητα :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} \equiv 0 \quad (1-61)$$

"Αν όμως ξέρουμε και τό $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \beta$ τότε έχουμε ακόμα μία διαφορική εξίσωση ανεξάρτητη από τις άλλες.

"Ωστε έχοντας τό $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ και τό $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ προσδιορίζουμε πλήρως τό πεδίο \vec{A} .

1.8. Χρονική Περιγραφή - Μιγαδικές Έκφράσεις των Άρμονικων Πεδίων.

Στή γενική περίπτωση, ένα πεδίο - μονόμετρο Φ ή διανυσματικό \vec{A} - είναι συνάρτηση και του χρόνου t .

Είναι δηλαδή :

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi(\vec{r}, t) \\ \vec{A} &= \vec{A}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (1-62)$$

Δεδομένου ότι η χρονική εξέλιξη των πεδίων που μας ενδιαφέρουν είναι κυρίως αρμονική (ήμιτονική ή συνημιτονική) θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με την περίπτωση αυτή.

Στή μελέτη των αρμονικών πεδίων πολλά προσφέρει ο μιγαδικός λογισμός γιατί απλοποιεί τις πράξεις και μετατρέπει τις διαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές.

Έτσι, τα αρμονικά πεδία

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_0(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi(\vec{r})) \quad (1-63)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = A_0(\vec{r}) \hat{A} \cos(\omega t + \varphi(\vec{r}))$$

μπορούν να θεωρηθούν ως τα πραγματικά μέρη μιγαδικών πεδίων :

$$\Phi(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[\Phi_0(\vec{r}) e^{j(\omega t + \varphi(\vec{r}))} \right] \quad (1-64)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[A_0(\vec{r}) \hat{A} e^{j(\omega t + \varphi(\vec{r}))} \right]$$

Αν γράψουμε τις (1-64) με τη μορφή :

$$\Phi(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[\Phi(\vec{r}) e^{j\omega t} \right] \quad (1-65)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[\vec{A}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right]$$

ορίζουμε τα λεγόμενα φασικά πεδία $\Phi(\vec{r})$ και $\vec{A}(\vec{r})$

(phasors), που αντιστοιχούν στα πραγματικά Φ και \vec{A} .

Τα φασικά πεδία είναι μιγαδικά, έχουν, δηλ. μέτρο και φάση και είναι συναρτήσεις μόνο της θέσης \vec{r} και όχι του χρόνου t .

Από τις (1-64), (1-65) προκύπτουν οι σχέσεις :

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0(\vec{r}) e^{j\varphi(\vec{r})}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_0(\vec{r}) e^{j\varphi(\vec{r})} \hat{A} \quad (1-66)$$

Ἡ χρήση τῶν φασικῶν πεδίων εἶναι πολύτιμη στή λύση γραμμικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων, ὥς πρὸς τὸ χρόνο γιὰτὶ μᾶς ἐπιτρέπει τὴν τελεστικὴς ἀντιστοιχίες:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow j\omega \quad (1-67)$$

$$\int \cdot dt \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \quad (1-68)$$

Ἐφαρμόζοντας τὴν ἀντιστοιχίαν αὐτὴν στή γραμμικὴ διαφορικὴ ἐξίσωση καταλήγουμε σὲ ἀλγεβρικὴ ἐξίσωση μὲ ἄγνωστο τὸ Φ ἢ τὸ \vec{A} . Καὶ τότε μὲ τὴν (1-65) προσδιορίζουμε τὰ πραγματικὰ ἁρμονικὰ πεδία.

Π α ρ α τ ῆ ρ η σ η

Τέτοιες ἀντιστοιχίες δὲν πρέπει νὰ ἐφαρμόζονται σὲ σχέσεις, ποὺ δὲν εἶναι γραμμικὲς. Π.χ. εἶναι:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \text{Re}[\vec{A} e^{j\omega t}] \cdot \text{Re}[\vec{B} e^{j\omega t}] = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{A} \cdot \vec{B}^* + \vec{A} \cdot \vec{B} e^{j2\omega t}]$$

δηλαδή

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \neq \text{Re}[\vec{A} \cdot \vec{B} e^{j2\omega t}]$$

2. ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ MAXWELL

Σκοπός μας είναι να συνδέσουμε τά πεδία με τις πηγές τους μέσα σε κάποιο υλικό μέσο.

2.1. Κλασικοί φυσικοί νόμοι που οδήγησαν στις εξισώσεις του Maxwell.

2.1.1. Νόμος του Ampere.

Σύμφωνα με το νόμο του Ampere το κλειστό έπικαμπύλιο ολοκλήρωμα της μαγνητικής διέγερσης*) $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}$ πάνω σε μια κλειστή καμπύλη C είναι ίσο με την ένταση I του ρεύματος, που περικλείνει η καμπύλη C :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (2-1)$$

2.1.2. Νόμος του Faraday.

Ο νόμος του Faraday διατυπώνεται με τη σχέση :

$$U_{επ} = - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (2-2)$$

όπου $\partial \Psi$ η στοιχειώδης μεταβολή της μαγνητικής ροής, που διαπερνά την επιφάνεια ενός πλαισίου, σε χρόνο ∂t και $U_{επ}$ ή έπα-

*) Το χαρακτηριστικό μέγεθος του μαγνητικού πεδίου, που αντιστοιχεί στην ένταση \vec{E} του ηλεκτρικού πεδίου είναι το \vec{B} , που πριν τό λέγαμε "μαγνητική έπαγωγή" και τώρα θά τό λέμε "ένταση του μαγνητικού πεδίου". Στο μέγεθος \vec{D} (πρώην "διηλεκτρική μετατόπιση"), που θά τό λέμε "ηλεκτρική διέγερση", αντιστοιχεί τό \vec{H} , που θά τό λέμε "μαγνητική διέγερση" (πρώην "ένταση μαγνητικού πεδίου")

γωγική τάση, που αναπτύσσεται στα άκρα του πλαισίου .

2.1.3. Νόμος του Gauss για την ηλεκτρική διέγερση \vec{D} .

Ο νόμος αυτός, που είναι γνωστός και ως " νόμος της ηλεκτρικής ροής " διατυπώνεται έτσι :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV = q \quad (2-3)$$

όπου S είναι μία κλειστή επιφάνεια, που περιορίζει έναν όγκο V , ρ ή πυκνότητα φορτίου και q το όλικό φορτίο μέσα στον όγκο V .

2.1.4. Νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο \vec{B} .

Ο νόμος αυτός διατυπώνεται με τη σχέση :

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2-4)$$

και εκφράζει ότι δεν υπάρχουν μεμονωμένα μαγνητικά " φορτία " (ποσότητες μαγνητισμού) .

2.1.5. Νόμος του Ohm.

Στή γενική του μορφή ο νόμος του Ohm έχει τη μορφή

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2-5)$$

όπου \vec{J} ή πυκνότητα ρεύματος σε κάποιο σημείο μέσα σ' έναν αγωγό, σ ή ειδική αγωγιμότητά του και \vec{E} ή ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο αυτό.

2.2. Οι εξισώσεις του Maxwell.

2.2.1. Πρώτη εξίσωση του Maxwell.

Από το νόμο του Ampere έχουμε:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (2-6)$$

όπου $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ή πυκνότητα ρεύματος αγωγής και σ ή ειδική αγωγιμότητα, ή $\vec{J} = \rho \vec{v}$ ή πυκνότητα ρεύματος μεταφοράς.

Ο Maxwell για να κάνει το νόμο του Ampere να ισχύει και στην περίπτωση της κίνησης κύματος στον ελεύθερο χώρο, όρισε το μέγεθος :

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2-7)$$

και το ονόμασε " πυκνότητα ρεύματος μετατόπισης " (displacement current density). Και στην (2-6) αντί του \vec{J} χρησιμοποίησε το άθροισμα $\vec{J} + \vec{J}_d$. Δηλαδή :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s} \quad (2-8)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Stokes :

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

γράφουμε την (2-8) ως εξής :

$$\int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s} = \int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{s}$$

$$\int_S \left[\vec{\nabla} \times \vec{H} - \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \right] \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2-9)$$

Επειδή όμως η επιφάνεια S είναι αυθαίρετη, για να αληθεύει η (2-9) πρέπει :

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad (2-10)$$

Η σχέση (2-10) εκφράζει την 1^η εξίσωση του Maxwell, όπου \vec{J} η πυκνότητα ρεύματος άγωγής (όταν πρόκειται για κίνηση φορτίων μέσα σε υλικό) ή η πυκνότητα του ρεύματος μεταφοράς (όταν πρόκειται για κίνηση φορτίων στον ελεύθερο χώρο) και $\partial \vec{D} / \partial t$ ο ρυθμός μεταβολής της ηλεκτρικής διέγερσης (πυκνότητα ρεύματος μετατόπισης).

2.2.2. Δεύτερη εξίσωση του Maxwell.

Από το νόμο του Faraday και από την ολική μαγνητική ροή, που διαπερνά την επιφάνεια, που περιορίζεται από το πλαίσιο :

$$\Psi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (2-11)$$

έχουμε :

$$U_{επ} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

άλλά :

$$U_{επ} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ωστε:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (2-12)$$

Εφαρμόζοντας τό θεώρημα τοῦ Stokes ἔχουμε :

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

ἢ

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2-13)$$

Επειδὴ καὶ πάλι ἡ ἐπιφάνεια S εἶναι αὐθαίρετη, γιὰ νὰ ἰσχύει ἡ (2-13) πρέπει :

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (2-14)$$

Ἡ (2-14) ἀποτελεῖ τὴ 2^η ἐξίσωση τοῦ Maxwell.

2.2.3. Τρίτη ἐξίσωση τοῦ Maxwell.

Ἀπό τό νόμο τοῦ Gauss (2-3) γιὰ τὴν \vec{D} εἶναι :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

Εφαρμόζοντας τό θεώρημα τοῦ Gauss , ἔχουμε :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dV = \int_V \rho dV$$

$$\int_V [\vec{\nabla} \cdot \vec{D} - \rho] dV = 0 \quad (2-15)$$

Από όπου προκύπτει η 3^η εξίσωση του Maxwell:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho} \quad (2-16)$$

2.2.4. Τέταρτη εξίσωση του Maxwell.

Από το νόμο του Gauss (2-4) για το \vec{B} :

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Έχουμε :

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dV = 0 \quad (2-17)$$

Επειδή ο όγκος V και η επιφάνεια S μπορούν να παρθούν αυθαίρετα για να αληθεύει η (2-17) πρέπει :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad (2-18)$$

Η (2-18) είναι η 4^η εξίσωση του Maxwell.

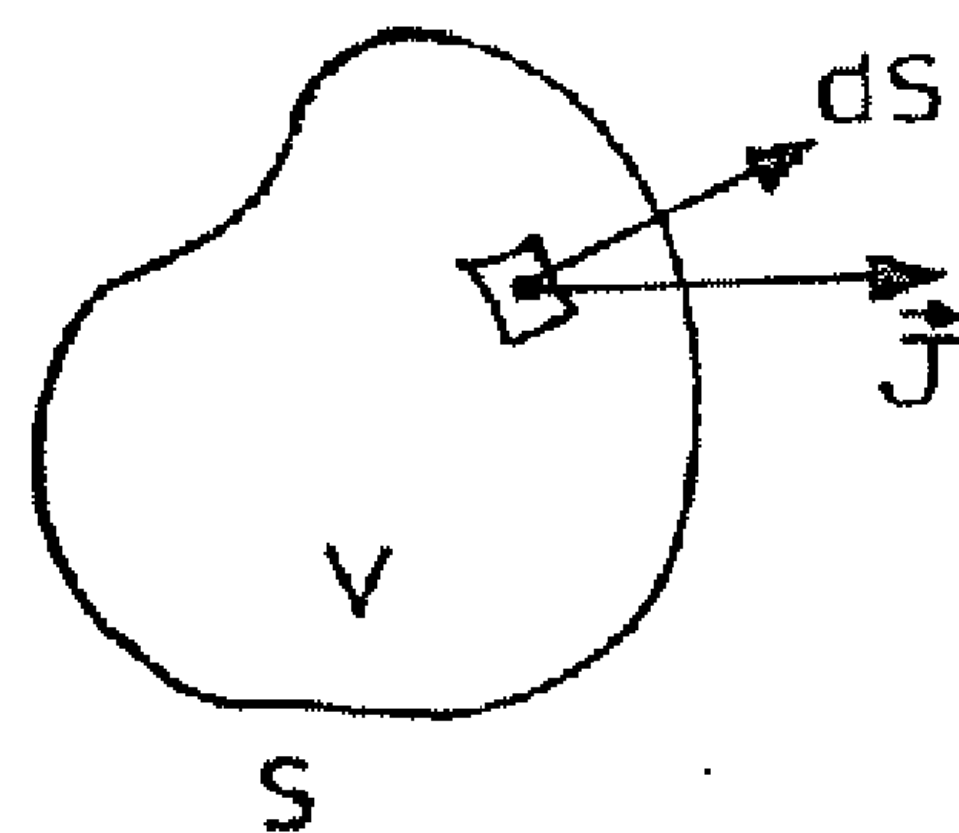
2.3. Η εξίσωση της συνέχειας.

Η εξίσωση της συνέχειας είναι μερική περίπτωση της γενικής ομώνυμης εξίσωσης και είναι απόρροια της αρχής της διατήρησης του φορτίου :

Τό ολικό φορτίο, που περιέχει ο όγκος V (βλ. σχ. 2-1) είναι :

$$q = \int_V \rho \, dV \quad (2-19)$$

Αν μέσα στον όγκο V δεν υπάρχουν πηγές ούτε καταβόθρες φορτίου, τότε :



Σχ. 2-1 Η εξίσωση της συνέχειας βασίζεται στην αρχή της διατήρησης του φορτίου μέσα στον όγκο V .

$$\left(\begin{array}{l} \text{ρυθμός ελάττωσης} \\ \text{του φορτίου } q \text{ μέ-} \\ \text{σα στον όγκο } V \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{ρυθμός έκροης} \\ \text{φορτίου μέσω} \\ \text{της } S \end{array} \right) \quad (2-20)$$

ή

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \rho \, dv \right) = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2-21)$$

Με εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss ή (2-21) γίνεται :

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, dv \quad (2-22)$$

ή

$$\int_V \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] \, dv = 0 \quad (2-23)$$

Επειδή, όμως, ο όγκος V είναι αυθαίρετος, πρέπει :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (2-24)$$

π α ρ α τ ή ρ η σ η

Η εξίσωση της συνέχειας είναι δυνατό να προκύψει από την πρώτη και την τρίτη εξίσωση του Maxwell :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2-25)$$

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 - \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{D})}{\partial t}$$

Αλλά

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

Οστε :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2-26)$$

Δηλαδή, η εξίσωση της συνέχειας περιέχεται μέσα στις εξισώσεις του Maxwell .

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-Ι

Οι Βασικές Έξισώσεις του Ηλεκτρομαγνητισμού.

Έξισώσεις του Maxwell			
Όλοκληρωτική μορφή		Διαφορική μορφή	
$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$	(2-27)	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	(2-31)
$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$	(2-28)	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(2-32)
$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$	(2-29)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$	(2-33)
$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	(2-30)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	(2-34)
Έξισωση της συνέχειας :		$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$	(2-35)
Έξισωση της δύναμης :		$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}, \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$	(2-36)
Έξισώσεις του μέσου			
$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	(2-37)	$\vec{H} = \mu^{-1} \vec{B} = \mu_0^{-1} \vec{B} - \vec{M}$	(2-41)
$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$	(2-38)	$\vec{M} = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \mu_0^{-1} \vec{B} = \chi_m \vec{H}$	(2-42)
$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$	(2-39)	$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$	(2-43)
$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e$	(2-40)	$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m$	(2-44)
			*)
$\vec{J} = \sigma \vec{E}$	ή	$\vec{J} = \rho \vec{v}$	(2-45)
		$v^2 = \frac{1}{\epsilon \mu}$	(2-46)
		$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$	(2-47)
ΟΡΟΛΟΓΙΑ			
\vec{E} : Ένταση του ηλεκτρικού πεδίου		μ_r : σχετική μαγν. διαπερατότητα	
\vec{B} : " " μαγνητικού " "		χ_e : ηλεκτρική επιδεκτικότητα	
\vec{D} : ηλεκτρική διέγερση του μέσου		χ_m : μαγνητική " "	
\vec{H} : μαγνητική " " " "		σ : ειδική αγωγιμότητα	
\vec{J} : πυκνότητα ρεύματος αγωγής ή μεταφοράς		\vec{P} : ηλεκτρική πόλωση του μέσου	
		\vec{M} : μαγνητική " " " "	
ρ : πυκνότητα φορτίου		c : ταχύτητα κύματος στο κενό	
ϵ : απόλυτη διηλεκτρική σταθερά		v : " " σε υλικό μέσο	
ϵ_r : σχετική " " " "		ϵ_0 : διηλ. σταθερά του κενού (απόλ.)	
μ : απόλυτη μαγν. διαπερατότητα		μ_0 : μαγν. διαπερ/τητα " " (")	

*) Οι τύποι (2-41) - (2-44) δά είχαν πλήρη αναλογία με τους (2-37) -

(2-40) αν είχε οριστεί $\mu^* = \mu^{-1}$, $\mu_0^* = \mu_0^{-1}$, $\chi_e^* = \chi_e$ και $\chi_m^* = -\frac{\chi_m}{1 + \chi_m}$

2.4.Οι εξισώσεις του Maxwell όταν τα πεδία και οι πηγές τους είναι αρμονικά.

"Όταν τα πεδία και οι πηγές τους είναι αρμονικές συναρτήσεις του χρόνου, τότε χρησιμοποιώντας μιγαδική ανάλυση μπορούμε να χειριστούμε εύκολότερα τις εξισώσεις (βλ. παρ. 1.8), αν αντί των πραγματικών πεδίων πάρουμε τα αντίστοιχα φασικά (phasors). Για την κάθε περίπτωση, ξεκινάμε χρησιμοποιώντας στην αντίστοιχη διαφορική εξίσωση, τις τελεστικές αντιστοιχίες (1-67), (1-68) εφαρμοσμένες πάνω στους αντίστοιχους phasors.

2.4.1. Πρώτη εξίσωση του Maxwell.

Από την (2-10) έχουμε :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} \quad (2-48)$$

ή

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = (\sigma + j\omega \epsilon) \vec{E} \quad (2-49)$$

2.4.2. Δεύτερη εξίσωση του Maxwell.

Από την (2-14) έχουμε :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (2-50)$$

2.4.3. Τρίτη εξίσωση του Maxwell.

Από την εξίσωση (2-16) προκύπτει :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (2-51)$$

2.4.4. Τέταρτη εξίσωση του Maxwell.

Από την εξίσωση (2-18) προκύπτει :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2-52)$$

2.4.5. Εξίσωση της συνέχειας.

Από την εξίσωση (2-24) προκύπτει :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + j\omega \rho = 0 \quad (2-53)$$

3. ΤΟ ΜΟΝΟΜΕΤΡΟ ΚΑΙ ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΕΔΙΟΥ.

3.1. Όρισμοί.

Από την εξίσωση

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3-1)$$

βγάζουμε το συμπέρασμα ότι μπορούμε να γράψουμε :

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}} \quad (3-2)$$

δεδομένου ότι για κάθε διάνυσμα \vec{A} είναι $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$.

Τό διανυσματικό πεδίο \vec{A} , πού όρίσαμε μ' αυτόν τόν τρόπο, λέγεται διανυσματικό δυναμικό.

Από τη 2^η εξίσωση του Maxwell έχουμε :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = - \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3-3)$$

Ολοκληρώνοντας την (3-3) έχουμε :

$$\vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{K} \quad (3-4)$$

όπου \vec{K} = σταθερό διάνυσμα τέτοιο ώστε :

$$\vec{\nabla} \times \vec{K} = 0 \quad (3-5)$$

καί άρα μπορεί να είναι

$$\vec{K} = \vec{\nabla} \Phi \quad (3-6)$$

όπου Φ = μονόμετρο πεδίο. Όστε :

$$\boxed{\vec{E} = - \vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad (3-7)$$

Τό πεδίο Φ λέγεται μ ο ν ό μ ε τ ρ ο δ υ ν α μ ι κ ό .

Στήν περίπτωση άρμονικά μεταβαλλόμενων πεδίων οί σχέσεις, (3-2) καί (3-7) γράφονται:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3-8)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - j\omega \vec{A} \quad (3-9)$$

3.2. Έξισώσεις Πεδίου διατυπώμενες μέ τά δυναμικά.

Στήν 1^η εξίσωση του Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3-10)$$

θέτουμε:

$$\vec{H} = \mu^{-1} \vec{B} \quad (3-11)$$

καί

$$\vec{J} = \vec{J}_i + \vec{J}_r \quad (3-12)$$

όπου \vec{J}_i ή πυκνότητα ρεύματος, πού επιβάλλεται από έξω καί λέγεται πυκνότητα ρεύματος επιβολής καί \vec{J}_r ή πυκνότητα του ρεύματος απόκρισης (ό χωρισμός αυτός του \vec{J} είναι γενικά αυθαίρετος καί εξαρτάται από τό συγκεκριμένο πρόβλημα) .

Τό ρεύμα απόκρισης μπορεί νά είναι ρεύμα άγωγής ή καί ρεύμα μεταφοράς. Στά παρακάτω θά υποθέσουμε τό πρώτο . Δηλαδή:

$$\vec{J}_r = \sigma \vec{E} \quad (3-13)$$

Στή (3-10) θέτουμε επίσης :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3-14)$$

καί

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (3-15)$$

καί ἔχουμε :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu \sigma \vec{E} + \mu \vec{J}_i + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3-16)$$

Ἀντικαθιστώντας

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3-17)$$

$$\text{καί} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (3-18)$$

$$\text{καί} \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (3-19)$$

ἔχουμε :

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\mu \sigma \vec{\nabla} \Phi - \mu \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \mu \vec{J}_i - \epsilon \mu \vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad \text{ἢ}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mu \vec{J}_i + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sigma \mu \Phi \right) \quad (3-20)$$

Ἀπό τήν (3-2) δέν ὀρίζεται μονοσήμαντα τό δυναμικό \vec{A} (ἀλλά ὀρίζεται μιά ὁλόκληρη κλάση διανυσμάτων). Γιά νά τό προσδιορίσουμε μονοσήμαντα πρέπει ἐκτός ἀπό τό $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ νά ἔχουμε καί τό $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$.
Οἱ Lorentz διατύπωσε τή συνθήκη .

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sigma \mu \Phi = 0} \quad (3-21)$$

πού λέγεται **συνθήκη τοῦ Lorentz** καί πού προσδιορίζει τήν $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$. Μέ τή συνθήκη τοῦ Lorentz ἡ (3-20) παίρνει τήν τελική της μορφή :

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\vec{J}_i}{\mu^{-1}}} \quad (3-22)$$

Από την 3^η εξίσωση του Maxwell έχουμε :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (3-23)$$

Αντικαθιστώντας τό $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ από τη δεσμευτική συνθήκη του Lorentz στην (3-23) έχουμε :

$$\nabla^2 \Phi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (3-24)$$

Οι εξισώσεις (3-22) και (3-24) είναι οι διαφορικές εξισώσεις των δυναμικών. 'Απ' αυτές προσδιορίζονται τά δυναμικά σε συνάρτηση με τις πηγές τους (\vec{J}_i και ρ). Οι εξισώσεις αυτές είναι μή ομογενείς γενικευμένες διαφορικές εξισώσεις κύματος.

Η συνθήκη, λοιπόν, του Lorentz εξασφαλίζει ώστε τά δυναμικά \vec{A} και Φ νά ικανοποιοῦν τη μή ομογενή γενικευμένη διαφορική εξίσωση κύματος *).

$$\text{Θέτοντας} \quad \epsilon \mu = \frac{1}{v^2} \quad (3-25)$$

γράφουμε τις (3-22), (3-24) έτσι:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\frac{\vec{J}_i}{\mu} \\ \nabla^2 \Phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -\frac{\rho}{\epsilon} \end{aligned} \quad (3-26)$$

*) Η δεσμευτική συνθήκη του Lorentz εξασφαλίζει τη συναλλοιότητα (covariant) ταυιστική σχέση μεταξύ των δυναμικών \vec{A} και Φ .

Έχοντας υπόψη τη γενική μη ομογενή διαφορική εξίσωση κύματος, από τις (3-26) βγάζουμε το συμπέρασμα ότι η ταχύτητα του κύματος, που περιγράφουν, είναι v δηλαδή :

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}} \quad (3-27)$$

ένω ο όρος $-\mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}$ είναι ένας " όρος απόσβεσης " , που εφαρμόζεται όταν η ειδική αγωγιμότητα $\sigma = 0$.

Ο τελεστής

$$\square^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (3-28)$$

λέγεται χωροχρονικός τελεστής του D'Alembert*.)

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή αυτό, π.χ. για την περίπτωση του κενού (όπου $\sigma = 0$) γράφουμε τις (3-26) έτσι:

$$\square^2 \vec{A} = -\frac{\vec{J}_i}{\mu^{-1}} \quad (3-29)$$

$$\square^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Όταν δεν υπάρχουν " διεγέρσεις " ($\vec{J}_i=0$, $\rho=0$) τότε οι (3-26) γίνονται ομογενείς .

*)

Ο τελεστής του D'Alembert όταν εφαρμόζεται, στην περίπτωση αρμονικού πεδίου της μορφής $\vec{A}e^{j\omega t}$ γράφεται :

$$\square^2 \equiv \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial(j\omega t)^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial(j\omega t)^2}$$

(όπου $x, y, z, j\omega t$ οι συντεταγμένες στον χώρο του Mincowski), ενώ για φασικό πεδίο (phasor) \vec{A} γράφεται :

$$\square^2 \equiv \nabla^2 + \frac{\omega^2}{v^2}$$

3.3. Έξισώσεις των πεδίων \vec{E} και \vec{B} .

"Ας φανταστούμε ένα όμογενές και ισότροπο μέσο και ας μελετήσουμε τα πεδία \vec{E} και \vec{B} μέσα στο μέσο αυτό.

Από την 1^η εξίσωση του Maxwell έχουμε :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_i + \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3-30)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{J}_i}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (3-31)$$

ή

$$-\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \mu \frac{\partial \vec{J}_i}{\partial t} + \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

ή

$$-\left(\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}\right) = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \frac{\partial \vec{J}_i}{\partial t} \quad (3-32)$$

Αλλά είναι:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (3-33)$$

Από τις (3-32) και (3-33) προκύπτει η διαφορική εξίσωση του \vec{E} :

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \rho + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \vec{J}_i}{\partial t}} \quad (3-34)$$

Σε σημεία όπου δεν υπάρχουν φορτία ($\rho=0$) ούτε ρεύματα έμβολης

($\vec{J}_i=0$) ή (3-34) γίνεται:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0} \quad (3-35)$$

"Αν επιπλέον το μέσο δεν έχει απώλειες ($\sigma=0$) τότε η (3-35) γίνεται :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ή} \quad \square^2 \vec{E} = 0 \quad (3-36)$$

Από τη 2^η εξίσωση του Maxwell έχουμε :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3-37)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = - \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3-38)$$

Από την (3-30) έχουμε :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} (\vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{J}_i - \sigma \vec{E}) \quad \text{και}$$

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \times \vec{J}_i - \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (3-39)$$

Από τις (3-38) και (3-39) προκύπτει :

$$-\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} - \vec{\nabla} \times \vec{J}_i + \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3-40)$$

και επιπλέον

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{και} \quad \nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla^2 \vec{B}$$

έχουμε τελικά:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \frac{\vec{\nabla} \times \vec{J}_i}{\mu^{-1}}} \quad (3-41)$$

Στήν περίπτωση που δεν υπάρχουν ρεύματα έπιβολής ($\vec{J}_i=0$) ή (3-41) γίνεται:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0} \quad (3-42)$$

Αν έπιπλέον τό μέσο δεν έχει απώλειες ($\sigma=0$) τότε ή (3-42) γίνεται:

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad \eta \quad \square^2 \vec{B} = 0 \quad (3-43)$$

όπου v ή ταχύτητα της διάδοσης του κύματος μέσα στο μέσο αυτό και που τή δύνει ή σχέση (3-27) .

3.4. Οί εξισώσεις τών δυναμικών \vec{A} και Φ και τών πεδίων \vec{E} και \vec{B} όταν αυτά είναι άρμονικά.

Στήν περίπτωση που πηγές και πεδία είναι άρμονικές συναρτήσεις του χρόνου, μπορούμε νά εκφράσουμε τς διαφορικές εξισώσεις τών \vec{A} , Φ , \vec{E} και \vec{B} , που αναφέραμε στά προηγούμενα, μέ τά αντίστοιχα φασικά μεγέθη (phasors) \vec{A} , Φ , \vec{E} και \vec{B} . Έτσι οί (3-22) και (3-24) γράφονται:

$$\nabla^2 \vec{A} + \omega^2 \epsilon \mu \vec{A} - j \omega \mu \sigma \vec{A} = - \frac{\vec{J}_i}{\mu^{-1}} \quad (3-44)$$

$$\nabla^2 \Phi + \omega^2 \epsilon \mu \Phi - j \omega \mu \sigma \Phi = - \frac{\rho}{\epsilon} \quad (3-45)$$

και οί (3-34) και (3-41) γράφονται:

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \epsilon \mu \vec{E} - j \omega \mu \sigma \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \rho + \frac{j \omega \vec{J}_i}{\mu^{-1}} \quad (3-46)$$

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \epsilon \mu \vec{E} - j\omega\mu\sigma \vec{E} = - \frac{\vec{\nabla} \times \vec{J}_i}{\mu^{-1}} \quad (3-47)$$

3.5. Έφαρμογή στη διάδοση επίπεδου μονοχρωματικού κύματος.

Θεωρούμε ένα μέσο ομογενές και ισότροπο, πού δεν περιέχει "διεγέρσεις" δηλ. είναι $\vec{J}_i = 0$, $\rho = 0$. Στην περίπτωση αρμονικού κύματος, μέ κυκλική συχνότητα ω , τό ηλεκτρικό πεδίο θά ικανοποιεῖ τή διαφορική εξίσωση (3-46) μέ $\rho = 0$ καί $\vec{J}_i = 0$ πού μπορούμε νά τήν ξαναγράψουμε ἔτσι:

$$\nabla^2 \vec{E} - (-\omega^2 \epsilon \mu + j\omega\mu\sigma) \vec{E} = 0 \quad (3-48)$$

$$\text{καί ἂν} \quad \gamma^2 \equiv -\omega^2 \epsilon \mu + j\omega\mu\sigma \quad (3-49)$$

ἡ (3-48) γράφεται:

$$\nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \vec{E} = 0 \quad (3-50)$$

"Αν περιοριστοῦμε σέ πεδίο \vec{E} πολωμένο κατὰ τή διεύθυνση \hat{y} καί διαδιδόμενο κατὰ τή διεύθυνση \hat{x} μπορούμε νά γράψουμε γιὰ τό φασικό ηλεκτρικό πεδίο :

$$\vec{E} = E_y(x) \hat{y} \quad (3-51)$$

πού σέ κάθε επίπεδο $x = \text{σταθ.}$ ἔχει σταθερή τιμή εἶναι δηλ. ἀνεξάρτητο ἀπό τά y καί z (ἐπίπεδο κύμα) .

Ἀπό τήν (3-51) ἡ (3-50) γίνεται :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \gamma^2 E_y = 0 \quad (3-52)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (3-52) είναι $\gamma^2 - \gamma^2 = 0$ οπότε $\gamma = \pm \gamma$ και η γενική λύση της είναι :

$$E_y = E_1 e^{\gamma x} + E_2 e^{-\gamma x} \quad (3-53)$$

όπου E_1 , E_2 μιγαδικές, γενικά, σταθερές :

$$\begin{aligned} E_1 &= E_1 e^{j\delta_1} \\ E_2 &= E_2 e^{j\delta_2} \end{aligned} \quad (3-54)$$

Από την (3-49) είναι :

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2 \epsilon \mu + j\omega \mu \sigma} \quad (3-55)$$

Γενικά, μπορούμε να γράψουμε :

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (3-56)$$

Η σταθερά γ λέγεται "σταθερά της διάδοσης", ή α λέγεται "σταθερά της εξασθένισης" και η β "σταθερά της φάσης".

Η (3-53) λοιπόν γράφεται:

$$E_y = E_1 e^{\alpha x} e^{j(\beta x + \delta_1)} + E_2 e^{-\alpha x} e^{j(-\beta x + \delta_2)} \quad (3-57)$$

Πολλαπλασιάζοντας επί $\hat{y} e^{j\omega t}$ και παίρνοντας το πραγματικό μέρος έχουμε :

$$\vec{E} = \hat{y} E_1 e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \delta_1) + \hat{y} E_2 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \delta_2) \quad (3-58)$$

Η γενική λύση (3-58) είναι έπαλληλúa δύο επίπεδων κυμάτων, που διαδίδονται κατά διευθύνσεις αντίθετες όπως φαίνεται από την αντίθεση του προσήμου του x στους δύο όρους.

3.5.1. Σέ μέσο χωρίς απώλειες ($\sigma=0$, ή $\sigma \ll \omega\epsilon$)

Στήν περίπτωση αυτή ή (3-55) δύνει:

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2 \epsilon \mu} = j\omega \sqrt{\epsilon \mu} \quad (3-59)$$

Όστε ή σταθερά τής φάσης είναι:

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \quad (3-60)$$

ένω ή σταθερά τής εξασθένησης είναι

$$\alpha = 0 \quad (3-61)$$

Όστε ή γενική λύση (3-58), στήν περίπτωση που $\sigma = 0$, γίνεται :

$$\vec{E} = \hat{y} E_1 \cos(\omega t + \beta x + \delta_1) + \hat{y} E_2 \cos(\omega t - \beta x + \delta_2) \quad (3-62)$$

Ο δεύτερος προσθετέος τής (3-62) αντιπροσωπεύει επίπεδο κύμα , που διαδίδεται προς τά θετικά x , ενώ ο πρώτος επίπεδο κύμα, που διαδίδεται προς τά αρνητικά x . Τά E_1 καί E_2 είναι οί τιμές πλάτους καί τά δ_1 , δ_2 οί τιμές φάσης, που εξαρτώνται από τίς αρχικές συνθήκες.

Παρατηρούμε στήν (3-62) ότι τά πλάτη τών κυμάτων μένουν τά ίδια -(σταθερά) κατά τή διάδοση, δέν έχουμε δηλ. εξασθένηση τών κυμάτων.

3.5.2. Σέ μέσο μέ μεγάλη αγωγιμότητα ($\sigma \gg \omega\epsilon$)

$$\text{Αν} \quad \sigma \gg \omega\epsilon \quad (3-63)$$

$$\text{τότε} \quad \omega\mu\sigma \gg \omega^2\mu\epsilon$$

καί ή (3-55) δύνει:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma} \quad (3-64)$$

$$\eta \quad \gamma = \sqrt{\omega \mu \sigma} e^{j\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\omega \mu \sigma} e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\omega \mu \sigma} \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{\omega \mu \sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

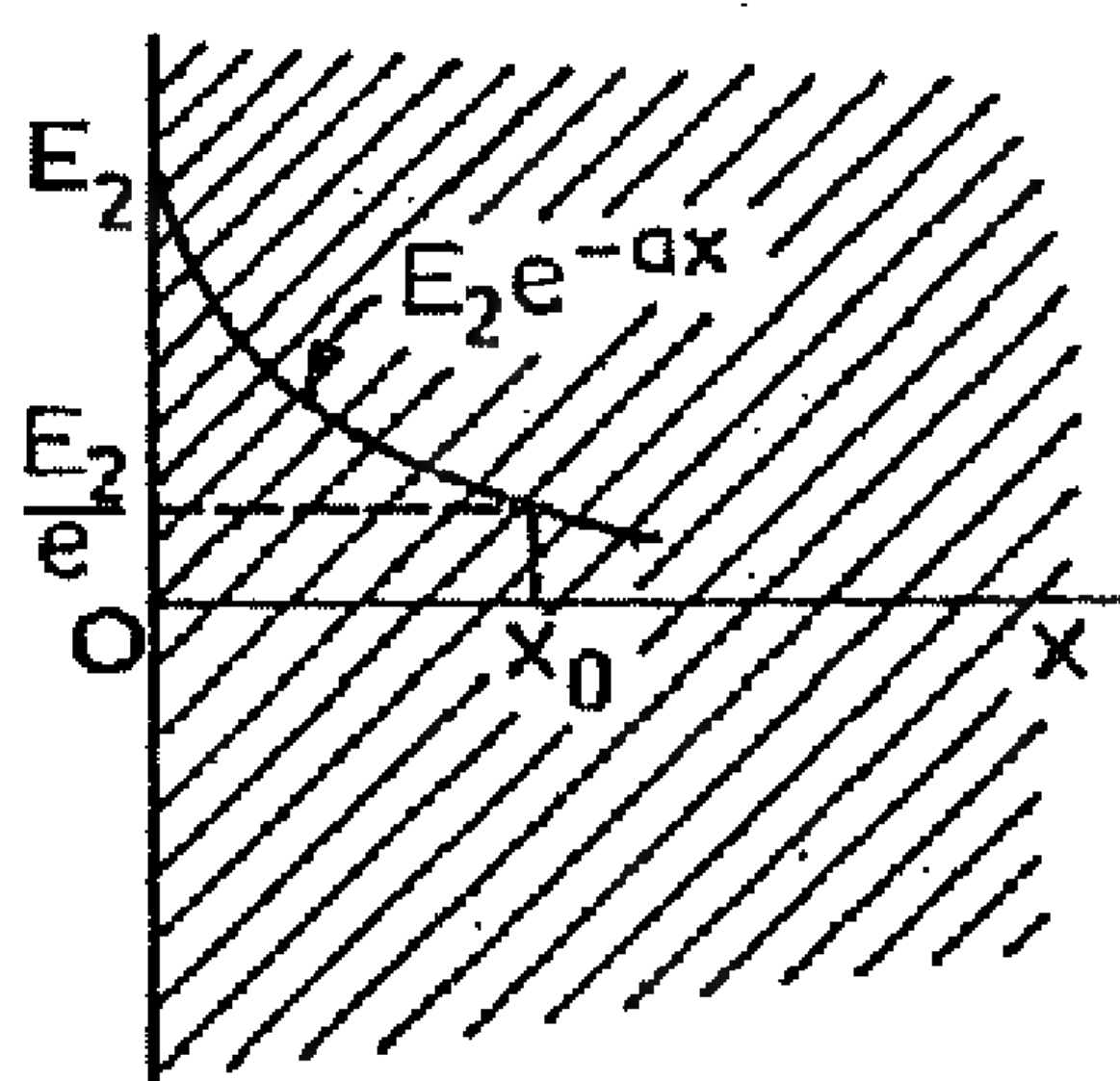
$$\eta \quad \gamma = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} + j \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \quad (3-65)$$

"Ωστε :

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} > 0 \quad (3-66)$$

"Ετσι, η γενική λύση (3-58) ισχύει όπως είναι με α και β τις τιμές της (3-66) .

"Εχουμε πάλι δύο επίπεδα κύματα, πού τό ένα (πρώτος προσθετέος) τρέχει προς τα αρνητικά x και τό άλλο (δεύτερος προσθετέος) προς τα θετικά x . Τά πλάτη τους, όμως, δέν μένουν σταθερά αλλά ελαττώνονται εκθετικά του πρώτου κατά τόν παράγοντα $e^{\alpha x}$ (πού μικραίνει όταν μικραίνει τό x , προς τα αρνητικά x δηλαδή) και του δεύτερου κατά τόν παράγοντα $e^{-\alpha x}$ (πού κι αυτός μικραίνει όσο αυξάνεται τό x) . Και στά δύο κύματα δηλαδή ό εκθετικός παράγοντας, πού περιέχει τό α είναι παράγοντας εξασθένησης.



Σχ. 3-1 Τό βάθος διείσδυσης x_0 είναι τό βάθος εκείνο, μέσα στό ύλικό, στό όποιο ή ένταση του πεδίου κέφτει e φορές κάτω από τήν τιμή, πού έχει στην επιφάνεια του ύλικου.

"Ετσι αν πάρουμε τήν αρχή των αξόνων στην άκρη του ύλικου και θεωρήσουμε ότι εΐσχωρεΐ μέσα στό ύλικό τό κύμα του δεύτερου προσθετέου

της (3.58), τότε σέ κάποιο βάθος x_0 θά είναι :

$$\alpha x_0 = 1 \quad (3-67)$$

και τό πλάτος $E_2 e^{-\alpha x}$ θά γίνει E_2 / e . Τό πάχος x_0 λέγεται "οπτικό πάχος" ή "βάθος της διείσδυσης"

Από τις (3-66) και (3-67) έχουμε

$$x_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (3-68)$$

Τό βάθος της διείσδυσης είναι πολύ μικρό στους καλούς αγωγούς και στις πολύ μεγάλες συχνότητες. Στόν τέλει αγωγό ($\sigma = \infty$) είναι $x_0 = 0$.

Οι ισοφασικές επιφάνειες ενός επίπεδου κύματος, σαν αυτά που μελετήσαμε, είναι :

$$\varphi = \omega t \pm \beta x + \delta = \text{σταθ.} \quad (3-69)$$

$$\text{ή για } t = \text{σταθ.} \text{ είναι και } x = \text{σταθ.} = c \quad (3-70)$$

Δηλαδή κάθε χρονική στιγμή όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω στο επίπεδο $x=c$ έχουν την ίδια φάση. Οι ισοφασικές επιφάνειες, λοιπόν, είναι επίπεδα κάθετα στον άξονα x , κατά τον οποίο γίνεται η διάδοση.

Τό μήκος κύματος λ είναι η απόσταση δύο σημείων, που την ίδια χρονική στιγμή ή φάση τους διαφέρει κατά 2π . δηλαδή

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t \pm \beta x_2 + \delta) - (\omega t \pm \beta x_1 + \delta) = \pm 2\pi \quad (3-71)$$

ή

$$\beta (x_2 - x_1) = 2\pi$$

ή

$$\beta \lambda = 2\pi$$

Άρα σε μέσο με $\sigma \gg \omega \epsilon$

έχουμε:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \quad (3-72)$$

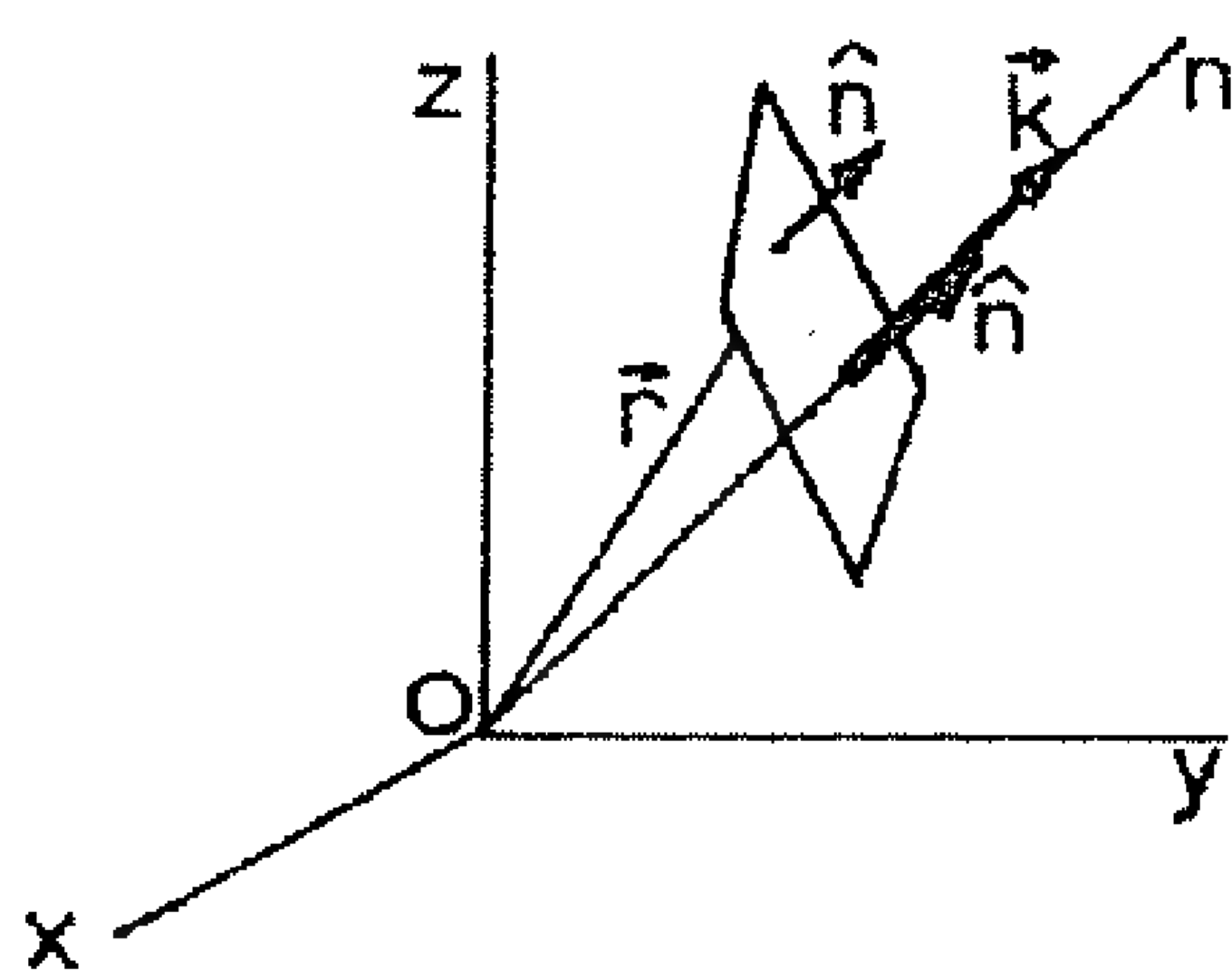
Ένω σέ μέσο μέ $\sigma \ll \omega \epsilon$
έχουμε:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \quad (3-73)$$

Η σταθερά της φάσης, β , λέγεται καί **κυματαριθμός**.

3.6. Γενίκευση τής Λύσης 'Επίπεδου Κύματος.

Μέ στροφή τῶν ἁξόνων μπορούμε νά κάνουμε τή λύση, πού μᾶς



ἀπασχόλησε στήν προηγούμενη παράγραφο, νά παριστάνει ἕνα ἐπίπεδο κύμα πού διαδίδεται κατὰ τή διεύθυνση \hat{n} (ὁ ἅξονας x δηλ. θά συμπίπτει μέ τόν ἅξονα n (βλ. σχῆμα)).

Γιά τόν κυματαριθμό τοῦ κύματος ἀντί τοῦ β χρησιμοποιοῦμε τό σύμβολο k .

Σχ. 3-2 Ἡ Γεωμετρία ἐπίπεδου κύματος πού διαδίδεται κατὰ τή διεύθυνση \hat{n} . Οἱ ἰσοφασικές ἐπιφάνειες εἶναι ἐπίπεδα κάθετα στό \hat{n} καί τό κυματάνυσμα εἶναι $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{n}$.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3-74)$$

θεωροῦμε ὅτι τό πεδίο ἔχει τυχαία κατεύθυνση καί ὅτι γιά κάθε συνιστώ-

σα τοῦ \vec{E}_i ($i=x,y,z$) ἰσχύει ἡ λύση (3-57). Ἄν περιοριστοῦμε στό ἕνα ἀπό τά δύο κύματα τῆς (3-57) καί μάλιστα σ' αὐτό πού διαδίδεται κατὰ τό θετικό \hat{n} , θά εἶναι :

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \vec{E}_i(\vec{r}) e^{j(\omega t - k\hat{n} \cdot \vec{r})} \quad (3-75)$$

ὅπου

$$\vec{k} = k\hat{n} = k n_x \hat{x} + k n_y \hat{y} + k n_z \hat{z} \quad (3-76)$$

εἶναι τό λεγόμενο **κυματάνυσμα** καί ἔχει προβολές :

$$k_x = k n_x, \quad k_y = k n_y, \quad k_z = k n_z \quad (3-77)$$

"Αν θεωρήσουμε ότι τά ω και \vec{k} στην (3-75) υπορούν να πάρουν όλες τις τιμές, $\omega \in (0, \infty)$, $k_x, k_y, k_z \in (-\infty, +\infty)$, τότε για κάθε ζευγάρι ω και \vec{k} θα έχω και μία λύση της διαφορικής εξίσωσης του \vec{E} ανεξάρτητη από τις άλλες.

Ο phasor του πλάτους $\vec{E}(\vec{r})$ καθεμιάς τέτοιας λύσης θα εξαρτάται από τα αντίστοιχα \vec{k} και ω .

Η περιγραφή οποιουδήποτε κύματος (μή επίπεδου και μή μονοχρωματικού) στο χώρο (ω, \vec{k}) γίνεται χρονικά μόν με ένα φάσμα συχνότητων $\Sigma\omega$, γεωμετρικά δέ με ένα φάσμα κυματανυσμάτων $\Sigma\vec{k}$.

"Αν λοιπόν αθροίσουμε όλες αυτές τις μερικές λύσεις θα έχουμε τη λεγόμενη γενική λύση με έπαλληλως επίπεδων κυμάτων. Έτσι θα έχουμε για κάθε συνιστώσα E_i (όπως μπορεί να αποδειχτεί) :

$$E_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^\infty E_i(\vec{k}, \omega) e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} dk_x dk_y dk_z \quad (3-78)$$

Η (3-78) δείχνει ότι η γενική λύση προκύπτει από την έφαρμογή επάνω στο $E_i(\vec{k}, \omega)$ ενός ολοκληρωτικού μετασχηματισμού που δέν είναι άλλος από τό Μετασχηματισμό Fourier.

Ο αντίστροφος Μετασχηματισμός της (3-78) μπορεί να μᾶς μεταφέρει στο χώρο (\vec{k}, ω) από τό χώρο (\vec{r}, t) .

$$E_i(\vec{k}, \omega) = \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty E_i(\vec{r}, t) e^{-j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} dx dy dz \quad (3-79)$$

Όστε οι (3-78) και (3-79) αποτελούν ένα ζεύγος μετασχηματισμού Fourier και δύνουν τη γενική λύση της κυματικής διαφορικής εξίσωσης με προσέγγιση επίπεδου κύματος.

Σημειώνουμε ότι τά ω και \vec{k} έχουν ουσιαστική φυσική σημασία, γιατί τό πρώτο αντιπροσωπεύει την ενέργεια ($\hbar\omega$) και τό δεύτερο

τήν όρμή ($\hbar \vec{k}$) τοῦ quantum τοῦ κύματος.

Στήν περίπτωση μ ο ν ο χ ρ ω μ α τ ι κ ο ὕ έ π ί π ε -
δ ο υ κύματος ἰσχύουν οἱ τελεστικές ἀντιστοιχίες:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow j\omega \quad \text{καί} \quad \vec{\nabla} \Leftrightarrow -j\vec{k} \quad (3-80)$$

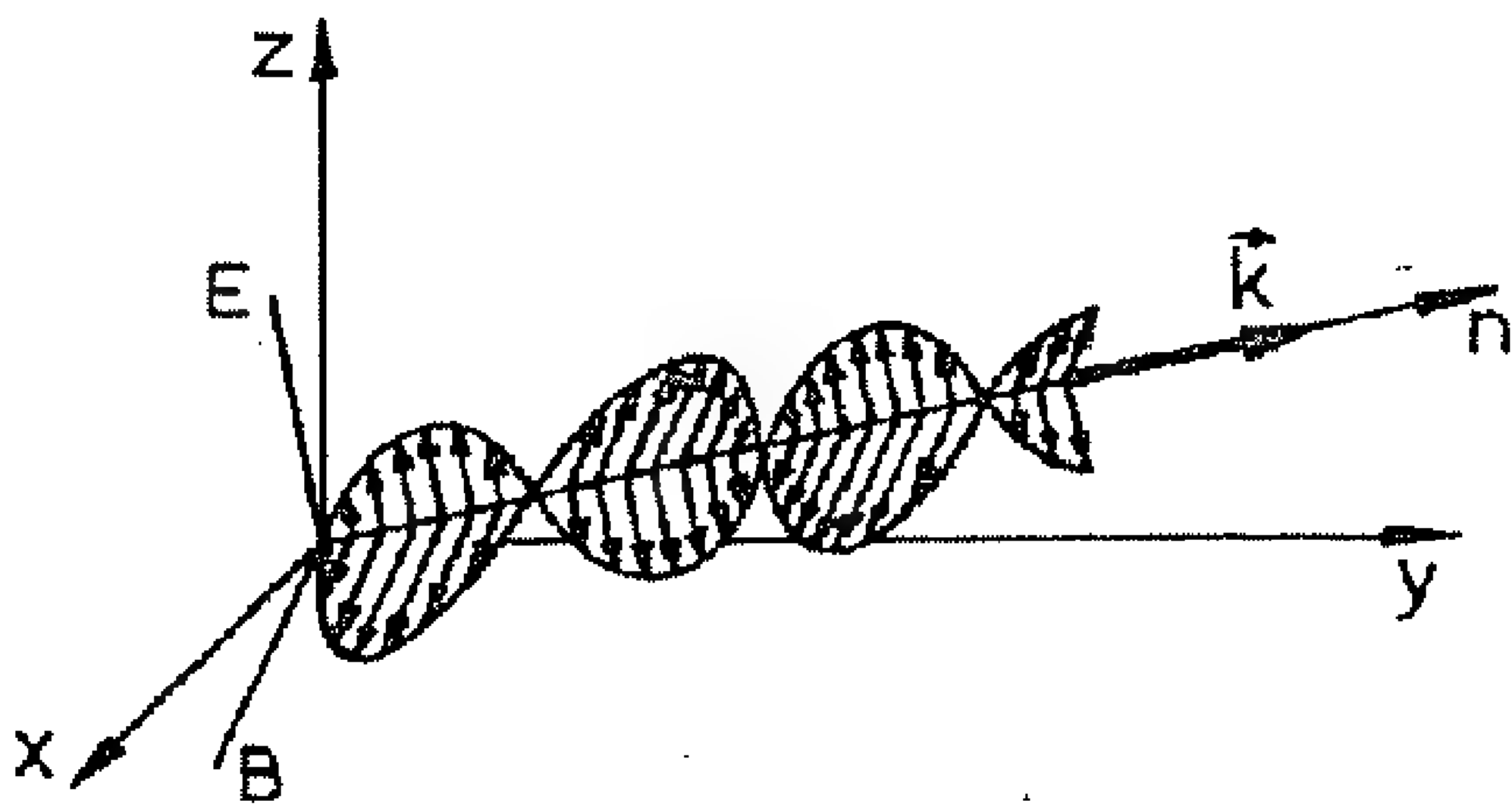
πού μετασχηματίζουν τίς ἐξισώσεις ἀπό τόν ἕνα χῶρο (\vec{r}, t) στόν ἄλλο (ω, \vec{k}) (γιά $\sigma = 0$ ἢ $\sigma \ll \omega \epsilon$).

Χρησιμοποιώντας τούς τελεστές (3-80) γράφουμε τήν 1^η καί τή 2^η ἐξίσωση τοῦ Maxwell ἔτσι :

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \epsilon \vec{E} \quad (3-81)$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \quad (3-82)$$

Ἀπό τήν (3-82) προκύπτει ὅτι στήν περίπτωση τοῦ μονοχρωματικοῦ ἐπίπεδου κύματος (ω, \vec{k}) εἶναι :



$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} \quad (3-83)$$

δηλαδή εἶναι

$$\vec{B} \perp \vec{k} \quad \text{καί} \quad \vec{B} \perp \vec{E} \quad (3-84)$$

Σκ.3-3 Ἐπίπεδο ἠλεκτρομαγνητικό κύμα, πού διαδίδεται κατ' τή διεύθυνση \vec{n} . Τό ἠλεκτρικό πεδίο \vec{E} , τό μαγνητικό πεδίο \vec{B} καί τό κυμαάνυσμα \vec{k} ἀποτελοῦν τρισηρθγώνιο σύστημα.

Ἀπό τήν (3-81) προκύπτει ὅτι

$$\vec{E} \perp \vec{k} \quad \text{καί} \quad \vec{E} \perp \vec{B} \quad (3-85)$$

Ὡστε, λοιπόν, στήν περι-

πτωση πού ἔχουμε μ ο ν ο χ ρ ω μ α τ ι κ ὀ έ π ί π ε δ ο
κύμα (ω, \vec{k}) , μέσα σέ ὕλικο χωρίς ἀπωλείες, τά δύο κύματα \vec{E} καί \vec{B} εἶναι:

α. συμφασικά

β. κάθετα στό \vec{k} καί μεταξύ τους καί ἐπομένως συνιστοῦν ἕνα ἐγκάρσιο ἠλεκτρομαγνητικό κύμα (TEM-transverse electromagnetic).

3.7 Διατήρηση τῆς Ἑνέργειας - Θεώρημα τοῦ Poynting.

3.7.1. Γενική Περίπτωση.

Θά ἐξετάσουμε παρακάτω ἓνα χρονικά μεταβαλλόμενο ἡλεκτρομαγνητικό πεδίο ἀπό ἐνεργειακή ἄποψη. Θεωροῦμε ὅτι ἡ ὅλική πυκνότητα ρεύματος \vec{J} ἀποτελεῖται ἀπό τῆς δύο συνιστώσες \vec{J}_i καὶ \vec{J}_r τοῦ ρεύματος ἐπιβολῆς καὶ τοῦ ρεύματος ἀπόκρισης :

$$\vec{J} = \vec{J}_i + \vec{J}_r \quad (3-86)$$

Ἀπό τῆς δύο συνιστώσες ἡ \vec{J}_i παρέχει ἐνέργεια ἐνῶ ἡ \vec{J}_r καταναλώνει .

Θά ὑπολογίσουμε τὸ ρυθμό, μέ τὸν ὁποῖο παρέχεται ἐνέργεια ἀπὸ τὴν \vec{J}_i στό ἡλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Ἐστω dq_i τὸ φορτίο πού βρίσκεται στὸν ὄγκο dV καὶ συμμετέχει στό σχηματισμὸ τοῦ \vec{J}_i κινούμενο μέ ταχύτητα \vec{u}_i . Τὸ φορτίο αὐτὸ ἀλληλεπιδρᾷ μέ τὸ ὅλικό ἡλεκτρομαγνητικό πεδίο καὶ δέχεται δύναμη :

$$d\vec{F} = dq_i (\vec{E} + \vec{u}_i \times \vec{B}) \quad (3-87)$$

Ἡ ἰσχύς πού προσφέρει ἡ \vec{J}_i στό πεδίο, μέσα στὸν ὄγκο dV , εἶναι :

$$dN = -d\vec{F} \cdot \vec{u}_i \quad (3-88)$$

$$\text{ἢ} \quad dN = -dq_i (\vec{E} + \vec{u}_i \times \vec{B}) \cdot \vec{u}_i = -\frac{dq_i}{dV} \vec{u}_i \cdot \vec{E} dV = -\rho_i \vec{u}_i \cdot \vec{E} dV \quad (3-89)$$

ἢ ἀπὸ τὴν (2-45)

$$dN = -\vec{J}_i \cdot \vec{E} dV \quad (3-90)$$

Υπολογίζουμε την έκφραση του \vec{J}_i από την 1^η εξίσωση του Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

καί από την (3-86) :

$$\vec{J}_i = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_r \quad (3-91)$$

Οπότε η (3-90) γίνεται :

$$dN = \left[-\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 \right) + \vec{E} \cdot \vec{J}_r \right] dv \quad (3-92)$$

Αλλά, γενικά, ισχύει :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (3-93)$$

όποτε:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} \quad (3-94)$$

καί

$$-\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (3-95)$$

καί έπειδή σύμφωνα μέ την 2^η εξίσωση του Maxwell είναι :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3-96)$$

έχουμε :

$$-\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3-97)$$

ή

$$-\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu^{-1} B^2 \right) \quad (3-98)$$

Ωστε η (3-92) γράφεται :

$$dN = \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu^{-1} B^2 \right) + \vec{E} \cdot \vec{J}_r + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \right] dv \quad (3-99)$$

Ἡ φυσική σημασία τῶν ὄρων τῆς (3-99) εἶναι :

- Τό ἀριστερό μέλος τῆς (3-99) εἶναι ἡ στιγμιαία ἰσχύς πού παρέχουν οἱ πηγές στό πεδίο μέσα στόν ὄγκο dV .

- Τό ἄθροισμα $\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu^{-1}B^2$ παριστάνει τήν πυκνότητα τῆς ἀποθηκευμένης ἐνέργειας ἡλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου καί ἡ παράγωγος τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ ἐκφράζει τό ρυθμό μεταβολῆς τῆς ἀποθηκευμένης ἡλεκτρομαγνητικῆς ἐνέργειας.

- Ὁ ὅρος $\vec{E} \cdot \vec{J}_r$ ἐκφράζει τήν πυκνότητα ἰσχύος, πού ἀπορροφᾷ τό ρεῦμα ἀπόκρισης \vec{J}_r . Π.χ. ἂν τό ρεῦμα ἀπόκρισης διαρρέει ἕναν ἄγωγό, ἡ ἰσχύς αὐτή εἶναι ἡ θερμική ἰσχύς Joule, ἐνῶ ἂν τό ρεῦμα \vec{J}_r ἀποτελεῖται ἀπό ἐλεύθερα φορτία ἡ ἰσχύς $\vec{E} \cdot \vec{J}_r$ ἀντιπροσωπεύει αὕξηση τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τῶν φορτίων, ἀνά μονάδα ὀγκοῦ (αὕξηση τῆς θερμοκρασίας).

Λαβαίνοντας ὑπόψη τήν ἀρχή τῆς διατήρησης τῆς ἐνέργειας, βγάζουμε τό συμπέρασμα ὅτι ὁ ὅρος $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$ ἐκφράζει τήν ἰσχύ, πού ἐκρέει ἀπό τόν ὄγκο dV ὡς ἀκτινοβολία.

Ἡ (3-99) γράφεται μέ τή μορφή:

$$\frac{dN}{dV} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu^{-1} B^2 \right) + \vec{E} \cdot \vec{J}_r + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \quad (3-100)$$

καί ἐκφράζει τήν ἰσότητα :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{πυκνότητα} \\ \text{ἰσχύος πού} \\ \text{προσφέρουν} \\ \text{οἱ πηγές } \vec{J}_i \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ρυθμός αὕξη-} \\ \text{σης τῆς πυκ-} \\ \text{νότητας τῆς} \\ \text{ἀποθηκευμένης} \\ \text{HM ἐνέργειας} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{πυκνότητα} \\ \text{ἰσχύος} \\ \text{πού κατα-} \\ \text{ναλώνουν} \\ \text{τά ρεύμα-} \\ \text{τα ἀπόκρι-} \\ \text{σης} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{πυκνότητα} \\ \text{τῆς στιγμι-} \\ \text{αίας ἀκτινο-} \\ \text{βολούμενης} \\ \text{ἰσχύος} \end{array} \right\} \quad (3-101)$$

Ολοκληρώνοντας τήν (3-99) σέ ὄγκο V , πού. περιορίζεται ἀπό κλειστή ἐπιφάνεια S , ἔχουμε :

$$N = \frac{d}{dt} \left[\int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu^{-1} B^2 \right) dV \right] + \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}_r dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV \quad (3-102)$$

Χρησιμοποιώντας τό θεώρημα τοῦ Gauss ἔχουμε τό λεγόμενο
θεώρημα τοῦ P o y n t i n g :

$$N = \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu^{-1} B^2 \right) dV + \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}_r dV + \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} \quad (3-103)$$

Δηλαδή :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ὀλική ἰσχύς} \\ \text{πού προσφέ-} \\ \text{ρουν οἱ πη-} \\ \text{γές μέσα} \\ \text{στόν ὄγκο } V \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ρυθμός αὔ-} \\ \text{ξησης τῆς} \\ \text{ἀποθηκευ-} \\ \text{μένης ἐνέρ-} \\ \text{γειας στόν} \\ \text{ὄγκο } V \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{ἰσχύς πού} \\ \text{καταναλώ-} \\ \text{νουν τά} \\ \text{ρεύματα} \\ \text{ἀπόκρισης} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{στιγμιαία} \\ \text{ἰσχύς πού} \\ \text{ἀκτινοβο-} \\ \text{λεῖται} \\ \text{ἀπό τόν} \\ \text{ὄγκο } V \text{ μέ-} \\ \text{σω τῆς } S \end{array} \right\} \quad (3-104)$$

Ὅπως φαίνεται καί ἀπό τήν (3-103) μπορούμε νά ὀρίσουμε τό δ υ -
ἀ ν υ σ τ ῆ ς P o y n t i n g :

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (3-105)$$

πού ἐκφράζει, κατά μέτρο, διεύθυνση καί φορά τή στιγμιαία ἰσχύ, πού ρέει ἀπό τή μονάδα ἐπιφάνειας μέ μορφή ἀκτινοβολίας. Δεδομένου ὅτι ἡ ἰσχύς αὕτη ἐξέρχεται μέ τή μορφή ἡλεκτρομαγνητικοῦ κύματος, τό μέτρο P τοῦ \vec{P} (ἰσχύς ἀνά μονάδα ἐπιφάνειας) ἐκφράζει τήν " ἔνταση " τοῦ κύματος.

Ὡστε ἡ σ τ ι γ μ ι α ῖ α ἀ κ τ ι ν ο β ο λ ο ὗ μ ε ν η ἰ-
σχύς ἀπό ἕναν ὄγκο V πρὸς τά ἔξω εἶναι:

$$N_{\text{rad}} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (3-106)$$

3.7.2. Περίπτωση Ἀρμονικῶν Πηγῶν καί Πεδίων.

Ὅταν οἱ πηγές καί τά πεδία εἶναι ἀρμονικά, τότε ἔχουμε :

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = \text{Re} \left[\vec{E} e^{j\omega t} \right] \times \text{Re} \left[\vec{H} e^{j\omega t} \right]$$

ἢ (βλ. καί παρατήρηση τῆς παρ. 1.8) :

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\vec{E} \times \vec{H}^* \right) + \frac{1}{2} \text{Re} \left(\vec{E} \times \vec{H} e^{j2\omega t} \right) \quad (3-107)$$

Ἡ (3-107) δίνει τό (πραγματικό) διάνυσμα Poynting ἂν ξέρουμε τά φασικά διανύσματα \vec{E} καί \vec{H} τῶν πεδίων \vec{E} καί \vec{H} .

Ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ β' μέλους τῆς (3-107) εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τό χρόνο καί ἀποτελεῖ τή συνεχῆ ή συνελίστωση \bar{P} (μέση χρονική τιμή) τοῦ διανύσματος Poynting :

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\vec{E} \times \vec{H}^* \right) \quad (3-108)$$

Ὁ ἄλλος ὅρος εἶναι ή ἐναλλασσόμενη συνελίστωση τοῦ \bar{P} (σέ συχνότητα 2ω) :

$$\tilde{P}(2\omega) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\vec{E} \times \vec{H} e^{j2\omega t} \right) \quad (3-109)$$

Ἀπό τήν (3-106) καί τήν

$$\vec{P} = \bar{P} + \tilde{P}(2\omega) \quad (3-110)$$

ἔχουμε :

$$N_{\text{rad}} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \bar{P} dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot \tilde{P} dV = \oint_S \bar{P} \cdot \hat{n} ds + \oint_S \tilde{P} \cdot \hat{n} ds \quad (3-111)$$

Ωστε ή στιγμιαία ακτινοβολούμενη ισχύς είναι :

$$N_{rad} = \bar{N}_{rad} + \tilde{N}_{rad} (2\omega) \quad (3-112)$$

όπου

$$\bar{N}_{rad} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = \oint_S \vec{P} \cdot \hat{n} dS \quad (3-113)$$

και

$$\tilde{N}_{rad} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{P}} dV = \oint_S \tilde{\vec{P}} \cdot \hat{n} dS \quad (3-114)$$

Ωστε ένα μέρος της ισχύος (ή συνεχής συνιστώσα \bar{N}_{rad}) εκρέει συνεχώς από τον όγκο V , κατά τή διεύθυνση του \vec{P} σέ κάθε σημείο της S , ενώ ένα άλλο μέρος (\tilde{N}_{rad}) "παλινδρομεύ" μέσα κι έξω από τον V μέ κυκλική συχνότητα 2ω .

Συνεχή κι εναλλασσόμενη συνιστώσα εμφανίζουν και ή αποθηκευμένη ηλεκτρομαγνητική ενέργεια, καθώς και ή ενέργεια, πού απορροφούν τά ρεύματα απόκρισης.

Εύκολα αποδειύχεται ότι :

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4} \epsilon (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) + \frac{1}{4} \epsilon \operatorname{Re}(\vec{E} \cdot \vec{E} e^{j2\omega t}) \quad (3-115)$$

και

$$w_m = \frac{1}{2} \mu^{-1} \vec{B} \cdot \vec{B} = \frac{1}{4} \mu^{-1} (\vec{B} \cdot \vec{B}^*) + \frac{1}{4} \mu^{-1} \operatorname{Re}(\vec{B} \cdot \vec{B} e^{j2\omega t}) \quad (3-116)$$

και

$$\vec{E} \cdot \vec{J}_r = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E} \cdot \vec{J}_r^*) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E} \cdot \vec{J}_r e^{j2\omega t}) \quad (3-117)$$

όπου w_e και w_m ή πυκνότητα ηλεκτρικής και μαγνητικής ενέργειας και $\vec{E} \cdot \vec{J}_r$ ή πυκνότητα ενέργειας που καταναλώνουν τα ρεύματα απόκρισης.

Από την (3-117) συμπεραίνουμε ότι κατά μέσο όρο, χρονικά, οι πηγές παρέχουν ισχύ μόνο στη συνιστώσα εκείνη των ρευμάτων απόκρισης, που είναι παράλληλη με το ηλεκτρικό πεδίο.

Από τα παραπάνω βγάζουμε το συμπέρασμα ότι και το θεώρημα του Poynting (σχέση (3-103)) θα γράφεται :

$$N = \bar{N} + \tilde{N}(2\omega) \quad (3-118)$$

όπου

$$\bar{N} = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{4} (\epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \mu^{-1} \vec{B} \cdot \vec{B}^*) dV + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_V (\vec{E} \cdot \vec{J}_r^*) dV + \bar{N}_{\text{rad}} =$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_V (\vec{E} \cdot \vec{J}_r^*) dV + \bar{N}_{\text{rad}}$$

ή

$$\bar{N} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_V (\vec{E} \cdot \vec{J}_r^*) dV + \bar{N}_{\text{rad}} \quad (3-119)$$

και

$$\begin{aligned} \tilde{N} = & \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{4} \left[\operatorname{Re}(\vec{E} \cdot \vec{E} e^{j2\omega t}) + \operatorname{Re}(\vec{B} \cdot \vec{B} e^{j2\omega t}) \right] dV + \\ & + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_V (\vec{E} \cdot \vec{J}_r e^{j2\omega t}) dV + \tilde{N}_{\text{rad}} \end{aligned} \quad (3-120)$$

Γενικά οι τρεις προσθετέοι, που προκύπτουν από τα ολοκληρώματα της (3-120) δεν είναι σε φάση .

Σέ πολλές, μάλιστα, πρακτικές περιπτώσεις γίνεται σκόπιμη αλληλο-εξουδετέρωσή τους. Μιλᾶμε, τότε, γιά π ρ ο σ α ρ μ ο γ ή τῆς πηγῆς, ὅποτε ἔχουμε καί τή μεγαλύτερη ἀπόδοση συνεχῶς ἀκτινοβολούμενης ἰσχύος στό γύρω χώρο .

3.7.3. Μιγαδική Ἰσχύς - Μιγαδικό Διάνυσμα Poynting.

Ὅρίζοντας τό μέγεθος μιγαδική ἰσχύ

$$\mathcal{N} = - \int_V \vec{J}_i^* \cdot \vec{E} \, dV \quad (3-121)$$

πού προσφέρουν οἱ πηγές στό πεδίο μπορούμε νά ἀποδείξουμε ὅτι τό μέγεθος \bar{N} τῆς (3-119) εἶναι

$$\boxed{\bar{N} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \mathcal{N}} \quad (3-122)$$

Ὅρίζοντας τό μιγαδικό διάνυσμα Poynting:

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{E} \times \vec{H}^* \quad (3-123)$$

ἔχουμε :

$$\boxed{\bar{\vec{P}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \vec{\mathcal{P}}} \quad (3-124)$$

καί

$$\bar{N}_{\text{rad}} = \oint_S \bar{\vec{P}} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_S \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{n} \, dS \quad (3-125)$$

Ὅποτε ἡ συνεχής ἰσχύς πού καταναλώνουν τά ρεύματα ἀπόκρισης εἶναι (σχέση (3-119)), ἔση μέ τή διαφορά τῶν \bar{N} καί \bar{N}_{rad} , πού τίς παίρνουμε ἀπό τίς (3-122) καί (3-125).

Ὡστε ἀπό τή μιγαδική ἰσχύ \mathcal{N} καί τό μιγαδικό διάνυσμα Poynting $\vec{\mathcal{P}}$ μπορούμε νά υπολογίσουμε τά οὐσιώδη μεγέθη \bar{N} , \bar{N}_{rad} καί $\bar{N} - \bar{N}_{\text{rad}}$.

3.8. Λύση τῶν μὴ Ὁμογενῶν Ἐξισώσεων.

3.8.1. Στατικά Δυναμικά.

α. Στατικό μονόμετρο δυναμικό.

Ἀπὸ τὴ σχέση

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

ὅταν τὰ πεδία καὶ τὰ δυναμικά δέν ἐξαρτώνται ἀπὸ τὸ χρόνο (ἤλεκτροστατική, μαγνητοστατική), ἔχουμε :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) \quad (3-126)$$

Ἐστω ὅτι θέλουμε νὰ προσδιορίσουμε τὸ ἠλεκτρικὸ πεδίο στὴ θέση \vec{r} , πού δημιουργεῖ ἓνα σύστημα στατικῶν φορτίων (ἠλεκτροστατικὸ πεδίο).

Τὸ πεδίο αὐτό θά εἶναι ἐπαλληλία τῶν πεδίων, πού δημιουργοῦν τὰ φορτία, πού ὑπάρχουν σ' ὅλες τὶς θέσεις \vec{r}' τοῦ μελετώμενου χώρου.

Τὸ φορτίο

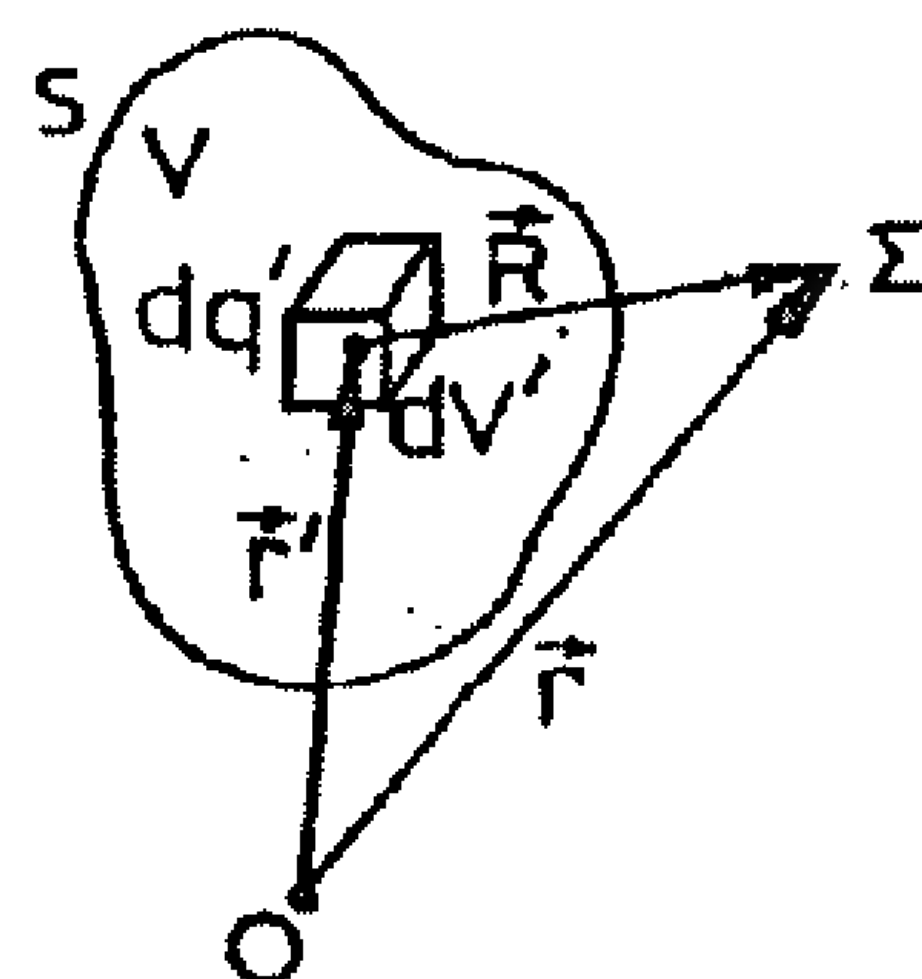
$$dq' = \rho(\vec{r}') dV' \quad (3-127)$$

πού ὑπάρχει μέσα στό στοιχειώδη ὄγκο dV' δημιουργεῖ στὴ θέση \vec{r} τὸ πεδίο Coulomb:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq'(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\rho(\vec{r}')\vec{R}}{4\pi\epsilon R^3} dV'$$

ἢ

$$d\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon} \left(-\frac{\vec{R}}{R^3} \right)$$



Σχ. 3-4 Τὸ στατικὸ δυναμικὸ Φ σὲν σημεῖο $\Sigma(\vec{r})$ εἶναι ἐπαλληλία τῶν δυναμικῶν, πού δημιουργοῦν ὅλα τὰ στοιχειώδη φορτία dq πού βρίσκονται στὶς διάφορες θέσεις \vec{r}' τοῦ χώρου.

άλλα

$$-\frac{\vec{R}}{R^3} = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right)$$

ώστε :

$$d\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \left(\frac{\rho(\vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon R} \right)$$

Όστε η συμβολή όλων των dq' στο πεδίο της θέσης \vec{r} δίνει :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon R} \quad (3-128)$$

Από τις (3-126) και (3-128) προκύπτει ότι :

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon R}} \quad (3-129)$$

β. Στατικό διανυσματικό δυναμικό.

Έστω μία χωρική κατανομή χρονικά σταθερής πυκνότητας ρεύματος $\vec{J}(\vec{r}')$. Σε κάθε θέση \vec{r}' , τότε, υπάρχει ένα ρεύμα :

$$I d\vec{l}' = \frac{I}{S} \frac{d\vec{l}'}{dl'} dV' = \vec{J}(\vec{r}') dV' \quad (3-130)$$

Τό μαγνητικό πεδίο, που δημιουργεί στη θέση \vec{r} , τό στριχελωδες αυτό ρεύμα, είναι, σύμφωνα με τό νόμο των Biot-Savart:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\mu^{-1} |\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

ή

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{4\pi\mu^{-1} R^3} dV' \quad (3-131)$$

Ολοκληρώνοντας για όλα τα $\vec{J}(\vec{r}')$ έχουμε:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{4\pi\mu^{-1}R^3} dV'} \quad (3-132)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = - \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{4\pi\mu^{-1}} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) dV' = \int_V \frac{1}{4\pi\mu^{-1}} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') dV' \quad (3-133)$$

Γενικά, αν \vec{C} ένα διανυσματικό και λ ένα μονόμετρο πεδίο ισχύει:

$$\vec{\nabla} \times \lambda \vec{C} = \vec{\nabla} \lambda \times \vec{C} + \lambda \vec{\nabla} \times \vec{C} \quad (3-134)$$

Εφαρμόζοντας την (3-134) στην (3-133) έχουμε :

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{R} \vec{J}(\vec{r}') \right) = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') + \frac{1}{R} \vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}') \quad (3-135)$$

Αλλά

$$\vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}') = 0 \quad (3-136)$$

γιατί, το $\vec{J}(\vec{r}')$ δεν εξαρτάται από το \vec{r} . Επομένως

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') \quad (3-137)$$

Ωστε:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_V \frac{1}{4\pi\mu^{-1}} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV' = \vec{\nabla} \times \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{4\pi\mu^{-1}R} dV' \quad (3-138)$$

Από τον όρισμό του διανυσματικού δυναμικού \vec{A} :

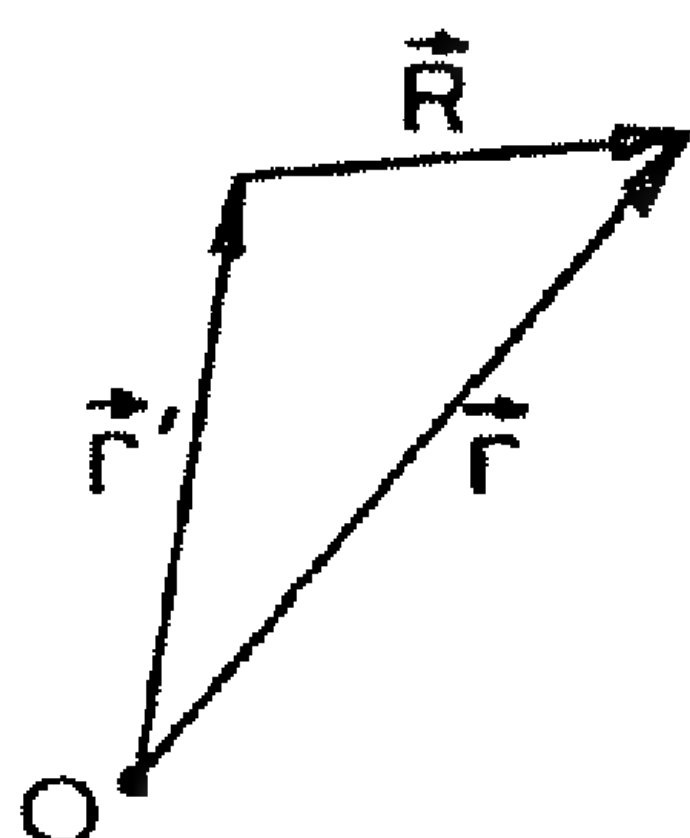
$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (3-139)$$

καί από τήν (3-138) προκύπτει ὅτι :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{4\pi\mu^{-1}R} dV' \quad (3-140)$$

Εἶναι φανερό ἡ ἀναλογία τῶν σχέσεων (3-129) καί (3-140), πού συνδέουν τά δυναμικά $\Phi(\vec{r})$ καί $\vec{A}(\vec{r})$ μέ τίς πηγές τους $\rho(\vec{r}')$ καί $\vec{J}(\vec{r}')$, πού στήν περίπτωση πού ἐξετάζουμε εἶναι "στατικές", δηλαδή συναρτήσεις μόνο τοῦ χώρου.

3.8.2. Χρονικά Μεταβαλλόμενα Δυναμικά - Καθυστερημένα Δυναμικά (Retarded Potentials).



Σχ.3-5 Στό σημεῖο \vec{r} καί τή χρονική στιγμή t τά πεδία, ἢ τά δυναμικά, ἔχουν τιμή, πού εἶναι ἐπαλληλία τῶν τιμῶν πού εἶχαν τά πεδία ἢ τά δυναμικά, σ' ὅλες τίς θέσεις \vec{r}' πρὶν ἀπό χρόνο R/u ἢ καθυστερημένα.

Στή γενική περίπτωση, πού τά μεγέθη ρ καί \vec{J} εἶναι καί συναρτήσεις τοῦ χρόνου t , τότε καί τά δυναμικά Φ καί \vec{A} εἶναι καί αὐτά συναρτήσεις τοῦ t , τό ὕδλο καί τά πεδία \vec{E} καί \vec{B} , καί ἐκανοποιοῦν τή γενική διαφορική ἐξίσωση κύματος, πού διαδίδεται στό χώρο μέ ταχύτητα

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (3-141)$$

Αὐτό σημαίνει ὅτι ἂν συμβεῖ μιά μεταβολή, στίς πηγές ἢ στά πεδία ἢ στά δυναμικά, στή θέση \vec{r}' , ἡ μεταβολή αὐτή " γίνεταί αἰσθητή " στή θέση \vec{r} ὕστερα ἀπό χρόνο R/u . Ὡστε τό δυναμικό $\Phi(\vec{r}, t)$ στή θέση \vec{r} καί τή χρονική στιγμή t προσδιορίζεται ἀπό τή διάταξη, πού εἶχαν στίς διάφορες θέσεις \vec{r}' , τά φορτία πρὶν ἀπό χρόνους R/u δηλ. τίς χρονικές στιγμές $t - \frac{R}{u}$.

Μέ βάση τήν (3-129) θά ἔχουμε λοιπόν :

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{U})}{4\pi\epsilon R} dV' \quad (3-142)$$

Μέ ανάλογο συλλογισμό θά ἔχουμε καί γιά τό διανυσματικό δυναμικό :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{U})}{4\pi\mu^{-1} R} dV' \quad (3-143)$$

Οἱ σχέσεις (3-142), (3-143) δύνουν, ὅπως λέμε, τὰ καθεστ-
τερ η μ έ ν α δ υ ν α μ ι κ á καί ἀποτελοῦν τίς γενικές
λύσεις τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τῶν δυναμικῶν, στήν περίπτωση
πού δέν ὑπάρχουν ὁριζικές ἐπιφανείες
πού νά ἐπιβάλλουν ὁρισμένες συνθήκες . Ἀπό αὐτές, καί μέ τίς
σχέσεις

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3-144)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3-145)$$

προσδιορίζονται τά πεδία $\vec{E}(\vec{r}, t)$ καί $\vec{B}(\vec{r}, t)$

Περίπτωση ἁρμονικῶν πηγῶν. Ὄταν οἱ πηγές εἶναι ἁρμονικές χρη-
σιμοποιώντας τή φασική ἔκφρασή τους (phasors), ἔχουμε :

$$\rho(\vec{r}', t) = \text{Re} [\rho(\vec{r}') e^{j\omega t}] \quad (3-146)$$

$$\vec{J}(\vec{r}', t) = \text{Re} [\vec{J}(\vec{r}') e^{j\omega t}] \quad (3-147)$$

Ἐπιπλέον εἶναι :

$$\frac{\omega}{U} = k \quad (3-148)$$

Τά καθυστερημένα δυναμικά, τώρα, σύμφωνα με τις (3-142), (3-143) είναι:

$$\text{όπου} \quad \Phi(\vec{r}, t) = \text{Re} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') e^{j(\omega t - kR)}}{4\pi\epsilon R} dV' \quad (3-149)$$

$$\text{και} \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \text{Re} \int_V \frac{\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') e^{j(\omega t - kR)}}{4\pi\mu^{-1}R} dV' \quad (3-150)$$

Αν $\Phi(\vec{r})$ και $\vec{A}(\vec{r})$ οι phasors των δυναμικών, από τις (3-149), (3-150) προκύπτει ότι :

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}') e^{-jkR}}{4\pi\epsilon R} dV' \quad (3-151)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \frac{\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') e^{-jkR}}{4\pi\mu^{-1}R} dV'$$

Οι (3-151) εκφράζουν τους phasors των καθυστερημένων δυναμικών σε συνάρτηση με τους phasors των πηγών τους.

3.9. Ακτινοβολία Στοιχειώδους Ηλεκτρικού Διπόλου.

Ας θεωρήσουμε ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο (βλ. σχ 3-6) μέσα σε όμογενές και ισότροπο μέσο. Υποθέτουμε ότι το δίπολο αποτελείται από τὰ φορτία $+q$, $-q$, πού αναπτύσσονται στα άκρα ενός πολύ μικρού αγωγού μήκους l , ο οποίος επιτρέπει τή δημιουργία ρεύματος

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (3-152)$$

Ωστε στήν τυχαία χρονική στιγμή t τὸ φορτίο στα άκρα τοῦ διπόλου είναι γενικά :

$$q = q(t) \quad (3-153)$$

Ἡ ἡλεκτρικὴ ροπή τοῦ διπόλου εἶ-
ναι:

$$\vec{p}(t) = q(t)\vec{l}$$

καὶ ὁ ρυθμὸς μεταβολῆς τῆς ὀρίζου-
σας διάνυσμα :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dq}{dt} \vec{l} = I\vec{l} = \vec{I}l \quad (3-154)$$

(ἔχουμε θεωρήσει ὡς φορά τοῦ ρεύ-
ματος τὴ φορά τοῦ \vec{l} δηλ. ἀπὸ τὸ
-q πρὸς τὸ +q).

Τὸ διανυσματικὸ δυναμικὸ $\vec{A}(\vec{r}, t)$

στὴ θέση \vec{r} καὶ τὴ χρονικὴ στιγμή t (σχέση (3-143)), εἶναι:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{v})}{4\pi\mu^{-1}R} dV' \quad (3-155)$$

Ἐπειδὴ τὸ στοιχειώδες δίπολο εἶναι πρακτικὰ σημειακό ($l \rightarrow 0$)

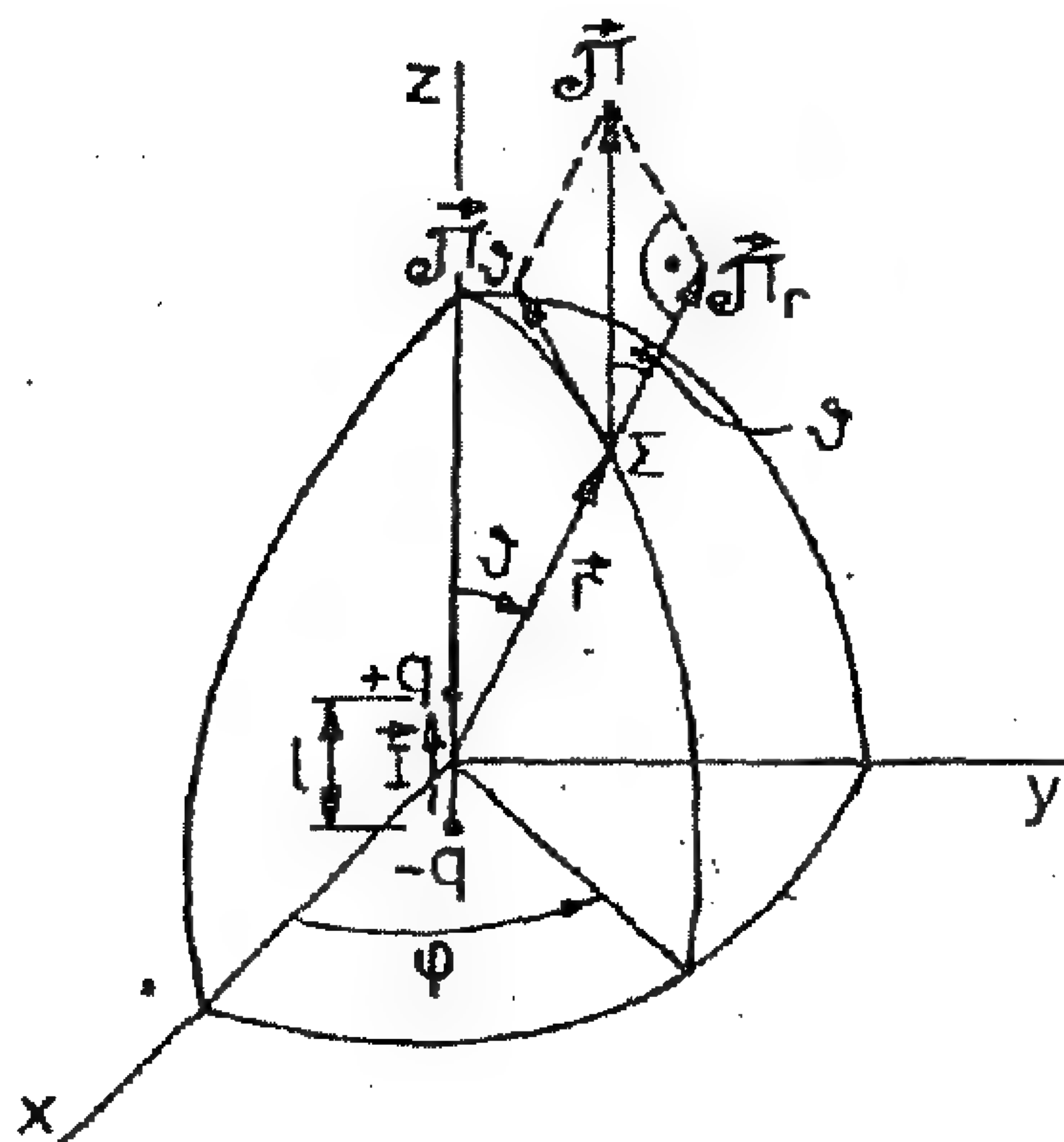
ἔχουμε $\vec{r}' = 0$ καὶ $R = |\vec{r} - \vec{r}'| = r$. Ὄστε ἡ (3-155) γίνεται :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int_V \frac{\vec{J}(t - \frac{r}{v})}{4\pi\mu^{-1}r} dV' \quad (3-156)$$

$$\text{Ἀλλὰ :} \quad \vec{J} dV' = I d\vec{z}' = \vec{I} dz' \quad (3-157)$$

καὶ ἡ (3-156) γράφεται :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int_0^l \frac{\vec{I}(t - \frac{r}{v})}{4\pi\mu^{-1}r} dz' = \frac{\vec{I}(t - \frac{r}{v})l}{4\pi\mu^{-1}r} \quad (3-158)$$



Σχ. 3-6. Γεωμετρία γιὰ τὴ μελέτη τῆς
ἀκτινοβολίας ἑνὸς στοιχειώδους ἡ-
λεκτρικοῦ διπόλου.

καί από τή (3-154) προκύπτει:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{M}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\mu^{-1}r}} \quad (3-159)$$

Ὡστε τό δυναμικό $\vec{A}(\vec{r}, t)$ στή θέση \vec{r} καί τή χρονική στιγμή t καθορίζεται από τό ρυθμό μεταβολῆς \vec{M} τῆς διπολικῆς ροπῆς κατά τή χρονική στιγμή $t - \frac{r}{v}$ (ὅπου $\frac{r}{v}$ εἶναι ὁ χρόνος, πού χρειάζεται ἡ διαταραχή γιά νά φτάσει στή θέση \vec{r}) καί ἐξαρτᾶται ἀντίστροφα ἀνάλογα ἀπό τήν ἀπόσταση r .

ὑποθέτουμε τώρα ὅτι ἡ μεταβολή εἶναι ἀρμονική.
Δηλαδή ἡ (3-153) εἶναι :

$$q = \operatorname{Re}(q e^{j\omega t}) \quad (3-160)$$

ὅπου q ὁ phasor τοῦ φορτίου. Ὁ Phasor \vec{I} τοῦ ἡλεκτρικοῦ ρεύματος εἶναι :

$$\vec{I} = j\omega q \hat{z} \quad (3-161)$$

ἐνῶ ὁ phasor \vec{M} τοῦ ρυθμοῦ μεταβολῆς τῆς ἡλεκτρικῆς ροπῆς εἶναι

$$\boxed{\vec{M} = \vec{I} l = j\omega q l \hat{z}} \quad (3-162)$$

Ἀπό τή (3-159) ἔχουμε :

$$\vec{A}(\vec{r}) e^{j\omega t} = \frac{\vec{M} e^{j\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)}}{4\pi\mu^{-1}r} \quad (3-163)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) e^{j\omega t} = \frac{\vec{M} e^{j(\omega t - kr)}}{4\pi\mu^{-1}r} \quad (3-164)$$

και

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{M}}{4\pi\mu^{-1}} \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (3-165)$$

θετουμε :

$$\vec{J} = \vec{M} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \quad (3-166)$$

Ωστε :

$$\vec{A} = \mu \vec{J} \quad (3-167)$$

και

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu \vec{\nabla} \times \vec{J} \quad (3-168)$$

Από την πρώτη εξίσωση του Maxwell έχουμε (θεωρώντας $\sigma=0$) :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = j\omega\epsilon\mu\vec{E} \quad (3-169)$$

και

$$\vec{E} = -\frac{j}{\omega\epsilon\mu} \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (3-170)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες όπου :

$$h_1 = 1$$

$$h_2 = r$$

$$h_3 = r \sin\theta$$

Οι συνιστώσες του \vec{J} είναι :

$$J_r = J \cos\theta$$

$$J_\theta = -J \sin\theta \quad (3-171)$$

$$J_\phi = 0$$

Εφαρμόζοντας την (3-168) έχουμε :

$$\vec{B} = \frac{\mu}{r^2 \sin \vartheta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\vartheta} & r\sin\vartheta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \pi_r & \pi_\vartheta & 0 \end{vmatrix} \quad (3-172)$$

Αναπτύσσοντας τη (3-172) έχουμε :

$$B_r = \frac{\mu}{r^2 \sin \vartheta} \left(-r \frac{\partial \pi_\vartheta}{\partial \varphi} \right) = \frac{-\mu}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\mathcal{M} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \vartheta \right) = 0$$

$$B_\vartheta = \frac{\mu}{r^2 \sin \vartheta} \left(r \frac{\partial \pi_r}{\partial \varphi} \right) = \frac{\mu}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\mathcal{M} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \cos \vartheta \right) = 0$$

$$\begin{aligned} B_\varphi &= \frac{\mu}{r^2 \sin \vartheta} \left[r \sin \vartheta \left(\frac{\partial (r \pi_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \pi_r}{\partial \vartheta} \right) \right] = \\ &= \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(-r \sin \vartheta \mathcal{M} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \right) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\cos \vartheta \mathcal{M} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \right) \right] = \\ &= \frac{\mu}{r} \left[jk \sin \vartheta \frac{\mathcal{M}}{4\pi} e^{-jkr} + \sin \vartheta \mathcal{M} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \right] \end{aligned}$$

ή τελικά :

$$B_\varphi = \frac{\mathcal{M}}{4\pi \mu^{-1}} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \vartheta \cdot e^{-jkr} \quad (3-173)$$

Από τη (3-170) έχουμε :

$$\vec{E} = -\frac{j}{\omega \epsilon \mu r^2 \sin \vartheta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\vartheta} & r\sin\vartheta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & r\sin\vartheta B_\varphi \end{vmatrix} \quad (3-174)$$

Αναπτύσσοντας τη (3-174) βρίσκουμε :

$$\mathcal{E}_r = \frac{\mathcal{M}}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\nu r^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \cos\vartheta e^{-jkr} \quad (3-175)$$

$$\mathcal{E}_\vartheta = \frac{\mathcal{M}}{4\pi\epsilon} \left(\frac{jk^2}{\omega r} + \frac{1}{\nu r^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \sin\vartheta e^{-jkr} \quad (3-176)$$

καί $\mathcal{E}_\varphi = 0 \quad (3-177)$

Πολλάπλασιάζοντας επί $e^{j\omega t}$, καί παίρνοντας τά πραγματικά μέρη

Έχουμε τίς συνιστώσες τοῦ πραγματικοῦ πεδίου \vec{E} , \vec{B} .

Συνοψίζοντας έχουμε :

$$\mathcal{E}_r(\vec{r}, t) = \frac{\mathcal{M}}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\nu r^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \cos\vartheta e^{j(\omega t - kr)}$$

$$\mathcal{E}_\vartheta(\vec{r}, t) = \frac{\mathcal{M}}{4\pi\epsilon} \left(\frac{jk^2}{\omega r} + \frac{1}{\nu r^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \sin\vartheta e^{j(\omega t - kr)}$$

$$\mathcal{E}_\varphi(\vec{r}, t) = 0$$

(3-178)

$$\mathcal{B}_r(\vec{r}, t) = 0$$

$$\mathcal{B}_\vartheta(\vec{r}, t) = 0$$

$$\mathcal{B}_\varphi(\vec{r}, t) = \frac{\mathcal{M}}{4\pi\mu^{-1}} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\vartheta e^{j(\omega t - kr)}$$

ὅπου :

$$\mathcal{M} = I l$$

Σ υ μ π ε ρ ά σ μ α τ α

• Ο παράγοντας $e^{j(\omega t - kr)}$, σ' όλες τις συνιστώσες του πεδίου, δείχνει ότι η ηλεκτρομαγνητική διαταραχή γύρω από ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο έχει τη μορφή σφαιρικού κύματος, που διαδίδεται με ταχύτητα $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$.

Τό πλάτος του κύματος, φθίνει όσο μεγαλώνει τό r , αλλά μέ διαφορετικό ρυθμό γιά τις διάφορες συνιστώσες.

• Όλοι οι όροι που εξαρτώνται από τό $\frac{1}{r^2}$ και από τό $\frac{1}{r^3}$ εξασθενούν πολύ γρήγορα όσο απομακρυνόμαστε από τό δίπολο. Έτσι, ενώ σέ κοντινές απόστάσεις επικρατεί τό πεδίο (3-178), που λέγεται και "πεδίο επαγωγής", σέ μακρινές απόστάσεις επικρατούν μόνο οι όροι, που εξαρτώνται από τό $\frac{1}{r}$ και συνιστούν τό λεγόμενο "πεδίο ακτινοβολίας". Ωστε τό πεδίο ακτινοβολίας εκφράζεται από τις σχέσεις :

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_\varphi = \mathcal{B}_r = \mathcal{B}_\vartheta = 0$$

$$\mathcal{E}_\vartheta = \frac{jk^2\mathcal{M}}{4\pi\epsilon\omega r} \sin\vartheta e^{j(\omega t - kr)} \quad (3-179)$$

$$\mathcal{B}_\varphi = \frac{jk\mathcal{M}}{4\pi\mu^{-1}r} \sin\vartheta e^{j(\omega t - kr)}$$

Στήν περίπτωση του κενού, όπου :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$$

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

οι (3-179) γίνονται :

$$\begin{aligned} E_r &= E_\varphi = B_r = B_\vartheta = 0 \\ E_\vartheta &= \frac{j 60\pi I l}{\lambda r} \sin\vartheta e^{j(\omega t - kr)} \\ B_\varphi &= \frac{j I l}{2\lambda r \mu_0^{-1}} \sin\vartheta e^{j(\omega t - kr)} \end{aligned} \quad (3-180)$$

όπου $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{f}$ τό μήκος κύματος της ακτινοβολίας.

Τό πηλίκο των συνιστωσών E_ϑ , H_φ της ακτινοβολίας είναι:

$$Z = \frac{E_\vartheta}{H_\varphi} = \frac{\mu E_\vartheta}{B_\varphi} = \frac{k}{\epsilon\omega} = \frac{1}{\nu\epsilon} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (3-181)$$

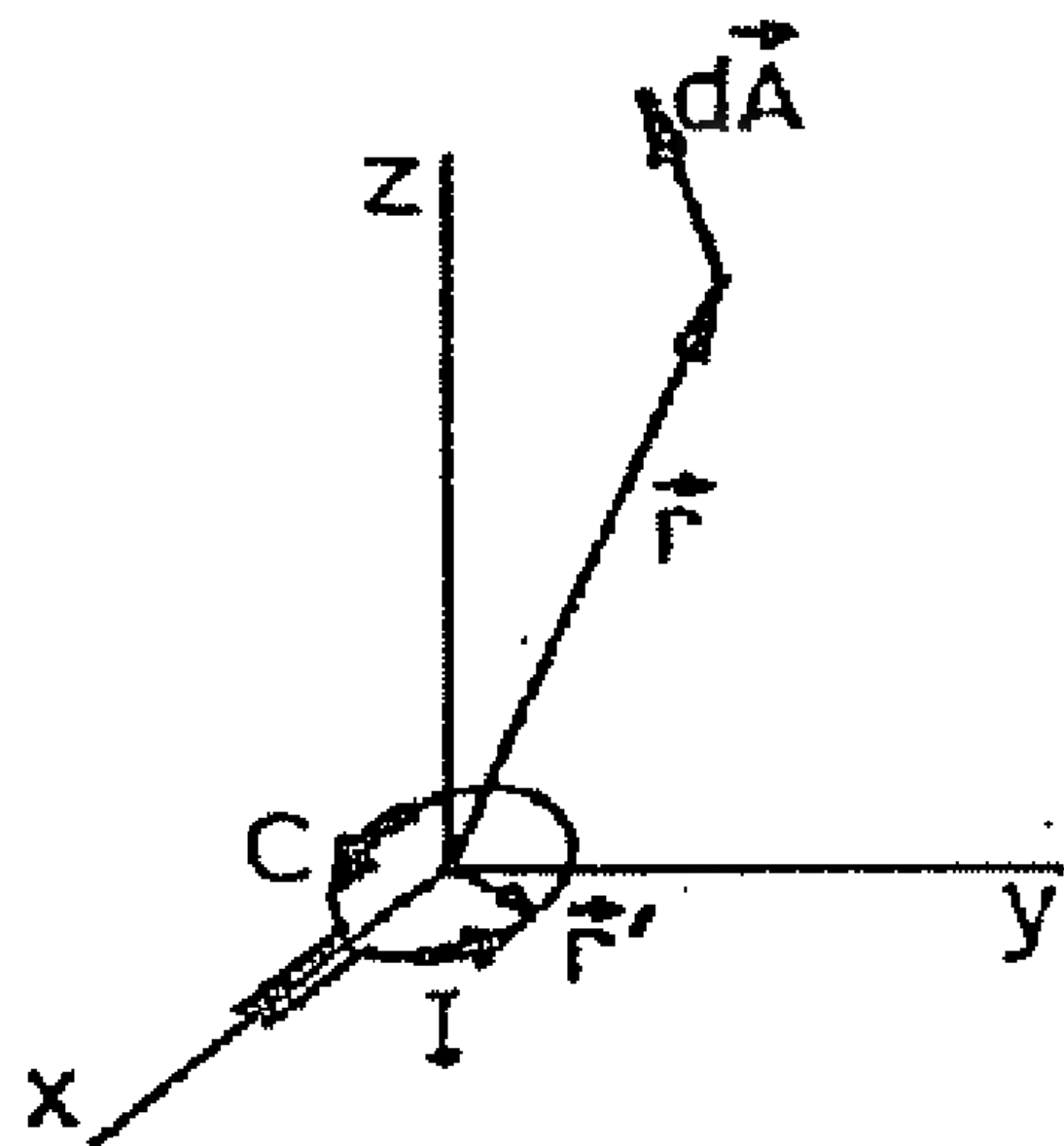
έξαρτάται μόνο από τό μέσο, καί λέγεται " κυματική αντίσταση" ή "έσωτερική αντίσταση" τοῦ μέσου.

Εύκολα προκύπτει ὅτι γιά τό κενό είναι:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \Omega = 377\Omega \quad (3-182)$$

3.10. Ακτινοβολία Στοιχειώδους Μαγνητικού Διπόλου.

Έστω τό στοιχειώδες μαγνητικό δίπολο του σχ. 3-7 (μικρός κυκλικός βρόχος μέ ακτίνα a), πού διαρρέεται από ρεύμα $I(\vec{r}', t)$.



Σχ. 3-7 Γεωμετρία για τή μελέτη τής ακτινοβολίας ενός μαγνητικού διπόλου.

Στή θέση \vec{r} καί τή χρονική στιγμή t τό στοιχείο $d\vec{l}'$ του βρόχου δημιουργεί καθυστερημένο διανυσματικό δυναμικό :

$$d\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\mu^{-1}} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{U})}{R} dV' \quad (3-183)$$

ή έπειδή

$$\vec{J} dV' = I d\vec{l}' = I a d\varphi' \hat{\varphi}' \quad (3-184)$$

είναι :

$$d\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{I(\vec{r}', t - \frac{R}{U})}{4\pi\mu^{-1}R} a d\varphi' \hat{\varphi}' \quad (3-185)$$

$$\text{όπου} \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \quad \text{καί} \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (3-186)$$

Εξετάζουμε στά παρακάτω τήν περίπτωση πού

$$r \gg a \quad (3-187)$$

όποτε είναι :

$$I(\vec{r}', t - \frac{R}{U}) = I(t - \frac{R}{U}) \quad (3-188)$$

καί

$$d\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{a I(t - \frac{R}{U})}{4\pi\mu^{-1}R} d\varphi' \hat{\varphi}' \quad (3-189)$$

Έστω, τώρα, ότι το ρεύμα είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου ,
δηλαδή

$$I = \text{Re} \{ I e^{j\omega t} \} \quad (3-190)$$

τότε

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \text{Re} \left[\frac{\alpha I e^{j\omega(t - \frac{R}{v})}}{4\pi\mu^{-1}R} d\varphi' \hat{\varphi}' \right] \quad (3-191)$$

ή

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \text{Re} \left[\frac{\alpha I e^{-jkR}}{4\pi\mu^{-1}R} d\varphi' \hat{\varphi}' e^{j\omega t} \right] \quad (3-192)$$

Από τη (3-192) έχουμε το φασικό διανυσματικό δυναμικό :

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\alpha I e^{-jkR}}{4\pi\mu^{-1}R} d\varphi' \hat{\varphi}' \quad (3-193)$$

πού δημιουργεί το στοιχείο $d\vec{l}'$ του βρόχου στη θέση \vec{r}' ($r \gg a$)

Θά υπολογίσουμε στη περίπτωση αυτή το πηλύκο $\frac{e^{-jkR}}{R}$:

Με την υπόθεση, ότι $r \gg a$ είναι

$$\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \ll 1 \quad (3-194)$$

και

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \simeq \sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} = \\ &= r \left(1 - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)^{1/2} \simeq r \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (3-195)$$

έπομένως :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left(1 - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)^{1/2} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) \quad (3-196)$$

και
$$e^{-jkR} \simeq e^{-jkr} e^{jk \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}} \simeq e^{-jkr} \left[1 + \frac{jk}{r} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \right] \quad (3-197)$$

και
$$\frac{e^{-jkR}}{R} = \frac{e^{-jkr}}{r} \left[1 + \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) (\vec{r} \cdot \vec{r}') + jk \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{r^3} \right] \quad (3-198)$$

η τελικά :

$$\frac{e^{-jkR}}{R} \simeq \frac{e^{-jkr}}{r} \left[1 + \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) (\vec{r} \cdot \vec{r}') \right] \quad (3-199)$$

Η (3-193) με την (3-199) δίνουν :

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\alpha I e^{-jkr}}{4\pi \mu^{-1} r} \left[1 + \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) (\vec{r} \cdot \vec{r}') \right] d\varphi' \hat{\varphi}' \quad (3-200)$$

Θα ολοκληρώσουμε την (3-200) σ' όλο τό βρόχο C .

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις :

$$\hat{\varphi}' = -\sin \varphi' \hat{x} + \cos \varphi' \hat{y} \quad (3-201)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = x x' + y y' = \alpha x \cos \varphi' + \alpha y \sin \varphi' \quad (3-202)$$

$$x = \rho \cos \varphi = r \sin \vartheta \cos \varphi \quad (3-203)$$

$$y = \rho \sin \varphi = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

και
$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y} \quad (3-204)$$

εύκολα αποδειχνουμε ότι :

$$\oint_C \hat{\varphi}' d\varphi' = 0 \quad (3-205)$$

και
$$\oint_C (\vec{r} \cdot \vec{r}') \hat{\varphi}' d\varphi' = \pi \alpha r \sin \vartheta \hat{\varphi} \quad (3-206)$$

όπου C ο κυκλικός βρόχος.

Όστε η ολοκλήρωση της (3-200) σ' όλο τό βρόχο δίνει:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\pi \alpha^2 \mathcal{I} e^{-jk r}}{4\pi\mu^{-1}} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\vartheta \hat{\varphi} \quad (3-207)$$

άλλά

$$\vec{m}_0 = \mathcal{I} \pi \alpha^2 \hat{z} = m_0 \hat{z} \quad (3-208)$$

είναι ο phasor της μαγνητικής ροπής του διπόλου.

Όστε :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{m_0 e^{-jk r}}{4\pi\mu^{-1}} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\vartheta \hat{\varphi} \quad (3-209)$$

Επειδή δεν υπάρχει συσσώρευση φορτίου τό μονόμετρο δυναμικό στή θέση \vec{r} είναι μηδέν και

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} \quad (3-210)$$

ή

$$\vec{E} = -\frac{j\omega m_0}{4\pi\mu^{-1}} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\vartheta e^{-jk r} \hat{\varphi} \quad (3-211)$$

Όστε τό \vec{E} έχει μόνο φ-συνιστώσα.

Είναι :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3-212)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\vartheta} & r\sin\vartheta \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & r\sin\vartheta A_\varphi \end{vmatrix} \quad (3-213)$$

Από τη (3-213) προκύπτει :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_r &= \frac{m_0}{2\pi\mu^{-1}} \left(\frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \cos\vartheta e^{-jkr} = \\ &= \frac{j\omega m_0}{2\pi\mu^{-1}} \left(\frac{1}{\omega r^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \cos\vartheta e^{-jkr} \end{aligned} \quad (3-214)$$

Από τήν $\vec{m} = \text{Re}[\vec{m}_0 e^{j\omega t}]$ (3-215)

Προκύπτει ὅτι : $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dt} = \text{Re}[j\omega \vec{m}_0 e^{j\omega t}]$ (3-216)

Τό διάνυσμα $\vec{M} = j\omega \vec{m}_0$ (3-217)

εἶναι ὁ phasor τοῦ ρυθμοῦ μεταβολῆς τῆς μαγνητικῆς ροπῆς τοῦ διπόλου. Ὡστε ἡ (3-214) γράφεται :

$$\mathcal{B}_r = \frac{\mathcal{M}}{2\pi\mu^{-1}} \left(\frac{1}{\omega r^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \cos\vartheta e^{-jkr} \quad (3-218)$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ (3-218) εἶναι ἐντελῶς ἀνάλογη μέ τήν (3-175)

Ἀνάλογα ἀπό τήν (3-213) βρῖσκουμε :

$$\mathcal{B}_\vartheta = \frac{\mathcal{M}}{4\pi\mu^{-1}} \left(\frac{jk^2}{\omega r} + \frac{1}{\omega r^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \sin\vartheta e^{-jkr} \quad (3-219)$$

Ἡ (3-219) εἶναι ἐντελῶς ἀνάλογη πρός τή (3-176)

Τέλος ἀπό τή (3-213) ἔχουμε :

$$B_\varphi = 0 \quad (3-220)$$

Πολλαπλασιάζοντας τίς συνιστώσες ἐπὶ $e^{j\omega t}$ καί παίρνοντας τά πραγματικά μέρη ἔχουμε τίς συνιστώσες τοῦ πραγματικοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου .

Συνοψίζοντας έχουμε :

$$E_r(\vec{r}, t) = 0$$

$$E_\theta(\vec{r}, t) = 0$$

$$E_\phi(\vec{r}, t) = -\frac{eM}{4\pi\mu^{-1}} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\vartheta e^{j(\omega t - kr)}$$

$$B_r(\vec{r}, t) = \frac{eM}{2\pi\mu^{-1}} \left(\frac{1}{\omega r^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \cos\vartheta e^{j(\omega t - kr)} \quad (3.221)$$

$$B_\theta(\vec{r}, t) = \frac{eM}{4\pi\mu^{-1}} \left(\frac{jk^2}{\omega r} + \frac{1}{\omega r^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \sin\vartheta e^{j(\omega t - kr)}$$

$$B_\phi = 0$$

$$\text{όπου } eM = j\omega I \pi a^2$$

Οί (3-221) είναι έντελώς αναλογες προς τίς (3-178) του ηλεκτρικού διπόλου, με μόνη τή διαφορά ότι οί ρόλοι των \vec{E} και \vec{B} έχουν εναλλαγεῖ.

Καί στην περίπτωση αὐτή τό πεδίο ἀκτινοβολίας ἀποτελεῖται μόνο ἀπό τούς ὅρους πού περιέχουν τό $\frac{1}{r}$ ἐνῶ οί ὅροι τῶν $\frac{1}{r^2}$ καί $\frac{1}{r^3}$ παραλείπονται . Δηλαδή :

$$E_r = E_\theta = B_r = B_\phi = 0$$

$$E_\phi = -\frac{jk eM}{4\pi\mu^{-1}r} \sin\vartheta e^{j(\omega t - kr)} \quad (3-222)$$

$$B_\theta = \frac{jk^2 eM}{4\pi\mu^{-1}\omega r} \sin\vartheta e^{j(\omega t - kr)}$$

Καί πάλι τό πηλύκο :

$$Z = \frac{E_{\varphi}}{H_{\varphi}} = \frac{\mu E_{\varphi}}{B_{\varphi}} = \frac{\omega}{k\mu^{-1}} = \frac{2\pi\nu\mu}{\lambda \frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

είναι ὅσο μέ τήν κυματική ἀντίσταση τοῦ μέσου.

4. ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Όταν λύνουμε τις ηλεκτρομαγνητικές διαφορικές εξισώσεις σε χώρους, που περιρίζονται με όριακές επιφάνειες, στις οποίες γίνεται απότομη αλλαγή των ιδιοτήτων του υλικού μέσου (ϵ, μ, σ), πρέπει να έχουμε υπόψη όρισμένες συνθήκες (όριακές συνθήκες), τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν πάνω στις όριακές επιφάνειες τα πεδία \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} και \vec{H} .

4.1. Κάθετες συνιστώσες των $\vec{D}, \vec{E}, \vec{H}$ και \vec{B} .

Ολοκληρώνοντας τη 3^η εξίσωση του Maxwell :

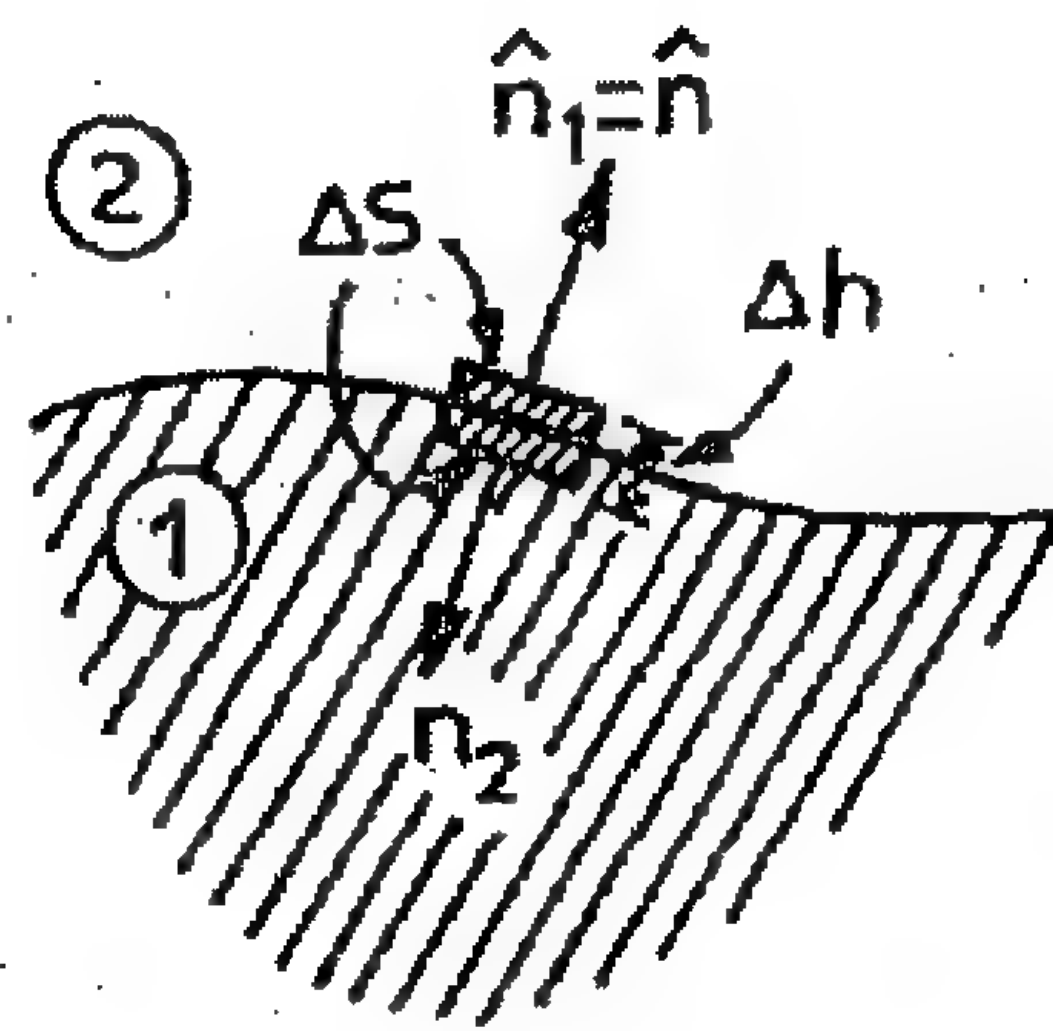
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (4-1)$$

στο στοιχειώδη όγκο ενός όρθου πρίσματος (βλ. σχ. 4-1) :

$$\nabla V = \Delta S \cdot \Delta h \quad (4-2)$$

έχουμε :

$$\int_{\Delta V} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dV = \int_{\Delta V} \rho dV \quad (4-3)$$



Σχ.4-1 Για την απόδειξη της συνέχειας της κάθετης συνιστώσας της ηλεκτρικής διέγερσης, σε μία όριακή επιφάνεια.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Gauss γράφουμε :

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS = \Delta Q \quad (4-4)$$

όπου ΔQ τό συνολικό φορτίο, που περιέχει ο όγκος ΔV και S η συνολική όριακή επιφάνεια που περιορίζει τον όγκο ΔV .

Θεωρώντας ότι $\Delta h \rightarrow 0$ γράφουμε τη (4-4) έτσι :

$$\vec{D}_1 \cdot \hat{n}_2 \Delta S + \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_1 \Delta S = \Delta Q \quad (4-5)$$

"Αν λάβουμε υπόψη ότι :

$$\hat{n} = \hat{n}_1 = -\hat{n}_2 \quad (4-6)$$

ή (4-5) γράφεται :

$$\vec{D}_2 \cdot \hat{n} - \vec{D}_1 \cdot \hat{n} = \frac{\Delta Q}{\Delta S} \quad (4-7)$$

"Αν πάρουμε καί $\Delta S \rightarrow 0$ τότε τό όριο τοῦ δεξιού μέλους γίνεται :

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \rho_s \quad (4-8)$$

όπου ρ_s ή λεγόμενη "έπιφανειακή πυκνότητα φορτίου" στό σημείο έκεῖνο τῆς έπιφάνειας. Δηλαδή:

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \quad (4-9)$$

"Ωστε, όταν διασχίζουμε μιὰ όριακή έπιφάνεια από τό μέσο(1) πρὸς τό μέσο (2) συναντοῦμε άσυνέχεια στήν κάθετη συνιστώσα τῆς ηλεκτρικῆς διέγερσης \vec{D} , ὅση μέ τήν έπιφανειακή πυκνότητα φορτίου ρ_s στό σημείο έκεῖνο τῆς έπιφάνειας. Στήν έφαρμογή τῆς (4-9) τό \hat{n} τό παίρνουμε μέ κατεύθυνση από τό μέσο (1) πρὸς τό μέσο (2).

Από τή σχέση

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (4-10)$$

καί τή (4-9) προκύπτει :

$$\hat{n} \cdot (\epsilon_2 \vec{E}_2 - \epsilon_1 \vec{E}_1) = \rho_s \quad (4-11)$$

Μέ ανάλογη έργασία, ξεκινώντας από τήν τέταρτη εξίσωση τοῦ Maxwell, ἔχουμε :

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (4-12)$$

καί από αὐτήν :

$$\hat{n} \cdot (\mu_2 \vec{H}_2 - \mu_1 \vec{H}_1) = 0 \quad (4-13)$$

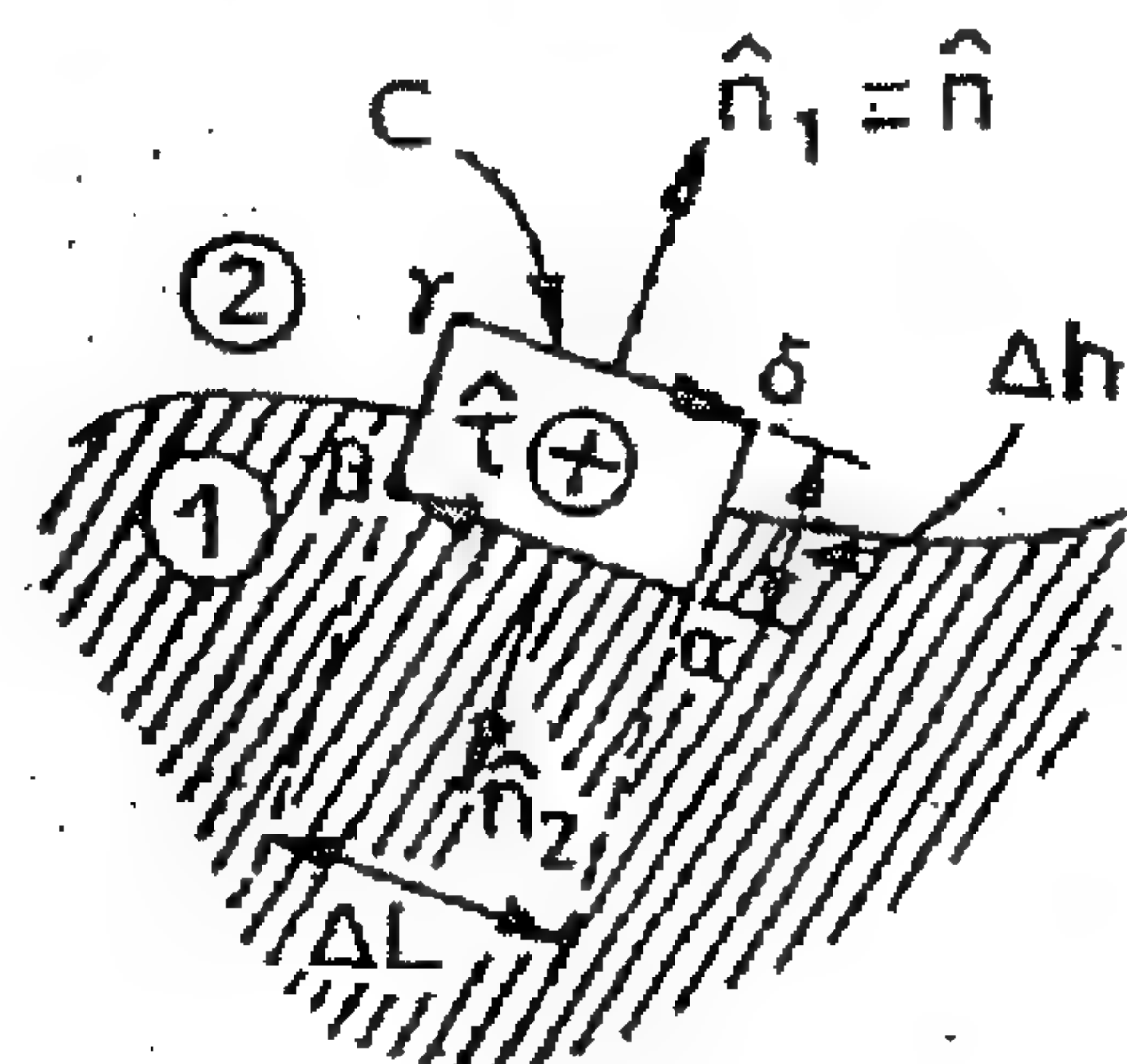
Ωστε, οι κάθετες συνιστώσες του \vec{B} εμφανίζουν συνέχεια όταν διασχίζουμε την όριακή επιφάνεια από το (1) στο (2), ενώ οι κάθετες συνιστώσες του \vec{H} εμφανίζουν ασυνέχεια, που εξαρτάται από τις μαγνητικές διαπερατότητες των δύο πλευρών.

4.2. Έφαπτομενικές συνιστώσες των \vec{H} , \vec{B} , \vec{E} και \vec{D}

Θεωρούμε στο επίπεδο του χαρτιού το ορθογώνιο C με βάση ΔL και ύψος $\Delta h \rightarrow 0$. Από την 1^η εξίσωση του Maxwell έχουμε :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4-14)$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή πάνω στην επιφάνεια $\Delta S = \Delta L \Delta h$ έχουμε:



Εκ. 4-2 Για την απόδειξη της ασυνέχειας της εφαπτόμενης συνιστώσας της μαγνητικής διέγερσης \vec{H} .

$$\int_{\Delta S} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \hat{t} dS = \int_{\Delta S} \vec{J} \cdot \hat{t} dS + \int_{\Delta S} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{t} dS \quad (4-15)$$

όπου \hat{t} το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα πάνω στην ΔS .

Με το θεώρημα του Stokes, όταν επιπλέον $\Delta h \rightarrow 0$, η (4-15) γίνεται:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{H}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int_\gamma^\delta \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_2 = \vec{J} \cdot \hat{t} \Delta S + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{t} \Delta S \quad (4-16)$$

Αλλά είναι:

$$d\vec{l}_1 = dl \hat{n} \times \hat{t} \quad (4-17)$$

$$d\vec{l}_2 = -dl \hat{n} \times \hat{t} \quad (4-18)$$

Ωστε :

$$\vec{H}_1 \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) \Delta L - \vec{H}_2 \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) \Delta L = \vec{J} \cdot \hat{t} \Delta S + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{t} \Delta S$$

$$\text{ή} \quad (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) = \vec{J} \cdot \hat{t} \frac{\Delta S}{\Delta L} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{t} \frac{\Delta S}{\Delta L} \quad (4-19)$$

Υπάρχει, όμως, περίπτωση τό παρακάτω όριο νά μή μηδενίζεται, αλλά νά έχουμε:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\vec{J} \Delta S}{\Delta L} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \vec{J} \cdot \Delta h = \vec{J}_S \quad (4-20)$$

όπου \vec{J}_S ή λεγόμενη "έπιφανειακή πυκνότητα ρεύματος" (δηλ. $\vec{J} \rightarrow \infty$, όταν $\Delta h \rightarrow 0$), ενώ πάντοτε

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta L} = 0 \quad (4-21)$$

γιατί τό $\partial \vec{D} / \partial t$ παραμένει πεπερασμένο. "Ωστε :

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) = \vec{J}_S \cdot \hat{t} \quad (4-22)$$

Αλλά από τή διανυσματική ταυτότητα:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}$$

ή (4-22) γίνεται:

$$\hat{t} \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \hat{n} = \vec{J}_S \cdot \hat{t} \quad (4-23)$$

$$\text{ή} \quad \hat{t} \cdot [(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \hat{n} - \vec{J}_S] = 0 \quad (4-24)$$

Τό \hat{t} όμως είναι ένα αούθαίρετο έφαπτομενικό διάνυσμα τής όριακής έπιφάνειας. Γι αυτό από τήν (4-24) προκύπτει:

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_S \quad (4-25)$$

"Αν \vec{H}_n καί \vec{H}_t είναι ή κάθετη συνιστώσα καί ή έφαπτομενική συνιστώσα τοῦ \vec{H} , θά είναι :

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_{1n} + \vec{H}_{1t} \quad (4-26)$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_{2n} + \vec{H}_{2t} \quad (4-27)$$

άλλά $\vec{H}_{1n} = (\hat{n} \cdot \vec{H}_1) \hat{n} \quad (4-28)$

$$\vec{H}_{2n} = (\hat{n} \cdot \vec{H}_2) \hat{n} \quad (4-29)$$

και $\vec{H}_{1t} = \vec{H}_1 - \vec{H}_{1n} \quad (4-30)$

$$\vec{H}_{2t} = \vec{H}_2 - \vec{H}_{2n} \quad (4-31)$$

πολλαπλασιάζοντας από αριστερά τα μέλη της (4-25) εξωτερικά επί \hat{n} και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα :

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

έχουμε :

$$\hat{n} \times [\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] = [\hat{n} \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] \hat{n} - (\hat{n} \cdot \hat{n}) (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \hat{n} \times \vec{J}_S$$

ή $(\hat{n} \cdot \vec{H}_1) \hat{n} - (\hat{n} \cdot \vec{H}_2) \hat{n} + \vec{H}_2 - \vec{H}_1 = -\hat{n} \times \vec{J}_S = \vec{J}_S \times \hat{n}$

ή $(\vec{H}_2 - \vec{H}_{2n}) - (\vec{H}_1 - \vec{H}_{1n}) = \vec{J}_S \times \hat{n}$

και τελικά :

$$\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = \vec{J}_S \times \hat{n} \quad (4-32)$$

Η (4-32) είναι άλλη έκφραση της (4-25) . Τό διάνυσμα $\vec{J}_S \times \hat{n}$ έχει μέτρο J_S και διεύθυνση κάθετη στα \hat{n} και \vec{J}_S . Από την (4-32) φαίνεται η ασυνέχεια της εφαπτομενικής συνιστώσας της μαγνητικής διέγερσης \vec{H} όταν υπάρχει επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος ($\vec{J}_S \neq 0$).

Μέ ανάλογη εργασία, ξεκινώντας από τη 2^η εξίσωση του Maxwell καταλήγουμε στην :

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (4-33)$$

$$\text{ή} \quad \vec{E}_{2t} - \vec{E}_{1t} = 0 \quad (4-34)$$

Ωστε, η εφαπτομενική συνιστώσα του πεδίου \vec{E} εμφανίζεται πάντοτε συνέχεια κατά τη μετάβαση από το μέσο (1) στο μέσο (2)

$$\text{Από την} \quad \vec{H} = \mu^{-1} \vec{B}$$

$$\text{ή (4-25) δίνει:} \quad \hat{n} \times \left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_1}{\mu_1} \right) = \vec{J}_s \quad (4-35)$$

$$\text{και ή (4-32)} \quad \frac{\vec{B}_{2t}}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_{1t}}{\mu_1} = \vec{J}_s \times \hat{n} \quad (4-36)$$

$$\text{Από την} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

ή (4-33) γίνεται:

$$\hat{n} \times \left(\frac{\vec{D}_2}{\epsilon_2} - \frac{\vec{D}_1}{\epsilon_1} \right) = 0 \quad (4-37)$$

ή αλλιώς :

$$\frac{\vec{D}_{2t}}{\epsilon_2} - \frac{\vec{D}_{1t}}{\epsilon_1} = 0 \quad (4-38)$$

4.3. Ειδικές Περιπτώσεις.

4.3.1. Όριακές συνθήκες στην επιφάνεια μεταξύ δύο καλών διηλεκτρικών.

Στις όριακές επιφάνειες μεταξύ δύο καλών διηλεκτρικών είναι $\rho_s = 0$ και $\vec{J}_s = 0$. Επομένως οι βασικές σχέσεις (4-9), (4-14) (4-25) και (4-33) γίνονται :

$$\left. \begin{aligned} \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= 0 \\ \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= 0 \quad \text{ή} \quad \vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0 \quad \text{ή} \quad \vec{E}_{2t} - \vec{E}_{1t} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-39)$$

Στις σχέσεις (4-39) πρέπει να προστεθούν και οι σχέσεις που θα προκύψουν από τις (4-39) και τις :

$$\vec{H} = \mu^{-1} \vec{B} \quad \text{και} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

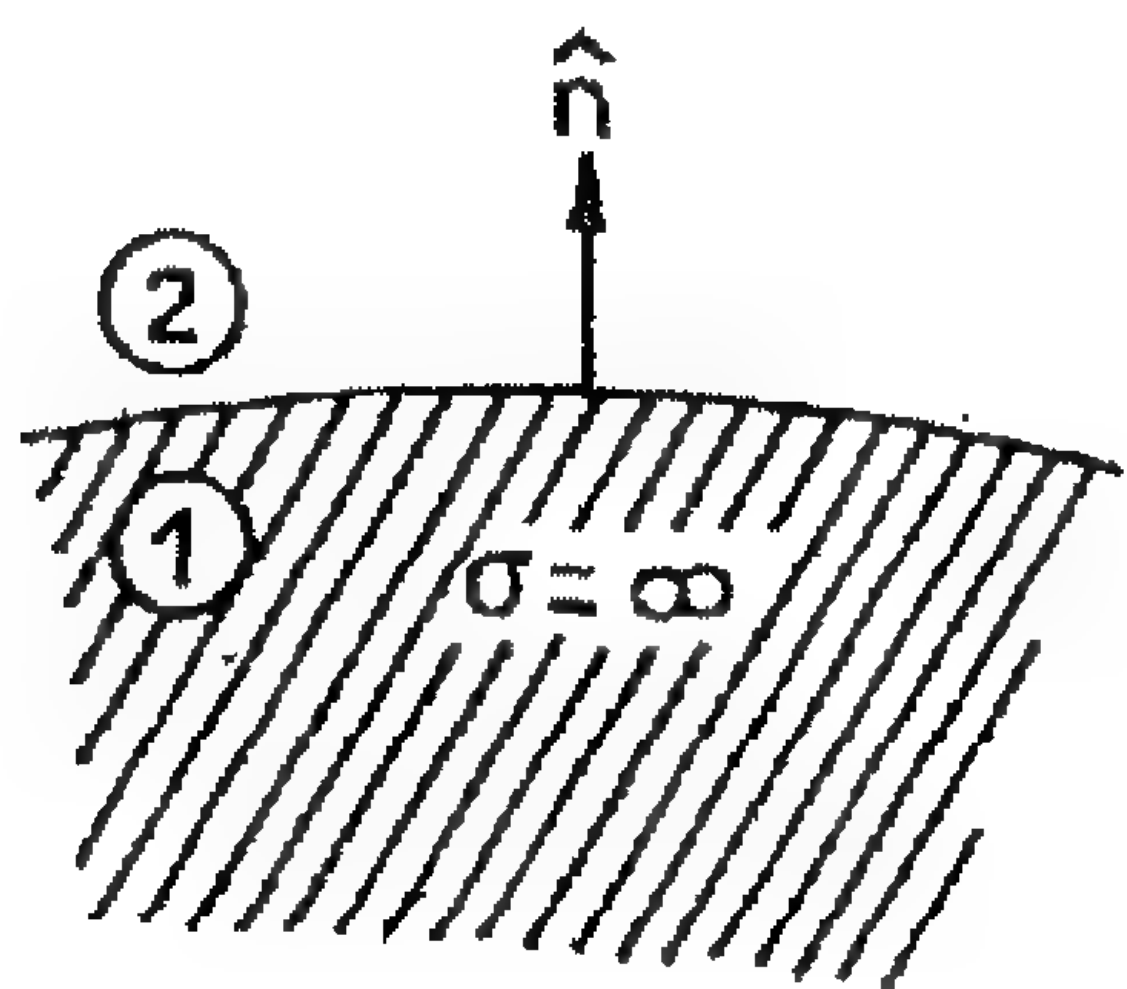
Ωστε, στην περίπτωση αυτή εμφανίζονται συνέχεια οι κάθετες συνιστώσες των \vec{D} και \vec{B} και οι εφαπτομενικές των \vec{H} και \vec{E} .

4.3.2. Όριακές συνθήκες στην επιφάνεια τέλειων αγωγών.

Στην ηλεκτροστατική περίπτωση (HΣ) γενικά, σ' έναν τέλειο αγωγό ($\sigma = \infty$), είναι :

$$\rho_s \neq 0, \quad \vec{J}_s = 0, \quad \vec{E}_1 = 0, \quad \vec{D}_1 = 0, \quad \vec{B}_1 \neq 0, \quad \vec{H}_1 \neq 0 \quad (4-40)$$

γιατί τό \vec{B}_1 δέν σχετίζεται κατ' ανάγκη μέ τό \vec{E}_1 , ὅπως στή δυναμική περίπτωση. Ἐτσι ἐνῶ τό \vec{E}_1 μηδενίζεται μέσα σ' ἕναν ἄγωγο, γιατί ἀναγκάζει τά φορτία ἀγωγιμότητας νά κινηθοῦν ἔτσι ὥστε νά τό ἐξουδετερώσουν, τό \vec{B}_1 δέν ἐξασκεῖ πάνω τους καμιά δύναμη, ἀφοῦ ἡ ταχύτητά τους εἶναι μηδέν, κι ἔτσι δέν ἀναγκάζει τά ἐλεύθερα στατικά φορτία νά διαγράψουν κυκλικές τροχιές, ὥστε νά τό ἐξουδετερώσουν.



Σχ.4-3 Γιά τίς ὁριακές συνθήκες στήν ἐπιφάνεια ἄγωγου.

Ὡστε, στήν ἡλεκτροστατική περίπτωση οἱ ὁριακές συνθήκες γιά ἕναν καλό ἄγωγο εἶναι :

$$\left. \begin{aligned} \vec{D}_2 \cdot \hat{n} &= \rho_s \\ \vec{B}_2 \cdot \hat{n} &= \vec{B}_1 \cdot \hat{n} \\ \hat{n} \times \vec{H}_2 &= \hat{n} \times \vec{H}_1 \\ \hat{n} \times \vec{E}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-41)$$

Στήν ἡλεκτροδυναμική περίπτωση (ΗΔ) μέσα στόν τέλει ἄγωγο εἶναι:

$$\vec{E}_1 = 0, \quad \vec{B}_1 = 0, \quad \vec{D}_1 = 0, \quad \vec{H}_1 = 0 \quad (4-42)$$

ἐνῶ στήν ἐπιφάνειά του :

$$\rho_s \neq 0, \quad \vec{J}_s \neq 0 \quad (4-43)$$

Στήν περίπτωση αὐτή οἱ ὁριακές συνθήκες γίνονται:

$$\left. \begin{aligned} \vec{D}_2 \cdot \hat{n} &= \rho_s \\ \vec{B}_2 \cdot \hat{n} &= 0 \\ \hat{n} \times \vec{H}_2 &= \vec{J}_s \\ \hat{n} \times \vec{E}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-44)$$

Οι συνθήκες (4-44), που ισχύουν για τέλειους άγωγούς, εφαρμόζονται και στους πραγματικούς άγωγούς όταν η συχνότητα είναι πολύ ύψηλή, όποτε τό βάθος διεισδύσεως $x_0 = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}$ είναι πάρα πολύ μικρό (π.χ. για τό χαλκό και όταν $f=1 \text{ GHz}$ είναι $x_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$).

4.4. Συνοπτικός Πίνακας Όριακων Συνθηκών.

ΣΥΝΙΣΤΩΣΑ ^{*)}	ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΟΡΙΑΚΗΣ ΕΠΙΦΑ- ΝΕΙΑΣ ΔΥΟ ΜΕΣΩΝ	ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΕΛΕΙΩΝ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ	ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΟΥ ΤΟ ΜΕΣΟ (1) ΕΙΝΑΙ ΤΕ- ΛΕΙΟΣ ΑΓΩΓΟΣ
ΚΑΘΕΤΗ	$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s$	$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0$	$\hat{n} \cdot \vec{D}_2 = \rho_s$
	$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$	$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$	$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (\text{H}\Sigma)$ $\hat{n} \cdot \vec{B}_2 = 0 \quad (\text{H}\Delta)$
ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΙΚΗ	$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s$ ἢ $\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = \vec{J}_s \times \hat{n}$	$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$ ἢ $\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = 0$	$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \quad (\text{H}\Sigma)$ $\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = 0 \quad (\text{H}\Sigma)$ καί $\hat{n} \times \vec{H}_2 = \vec{J}_s \quad (\text{H}\Delta)$ $\vec{H}_{2t} = \vec{J}_s \times \hat{n} \quad (\text{H}\Delta)$
	$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$ ἢ $\vec{E}_{2t} - \vec{E}_{1t} = 0$	$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$ ἢ $\vec{E}_{2t} - \vec{E}_{1t} = 0$	$\hat{n} \times \vec{E}_2 = 0$ ἢ $\vec{E}_{2t} = 0$

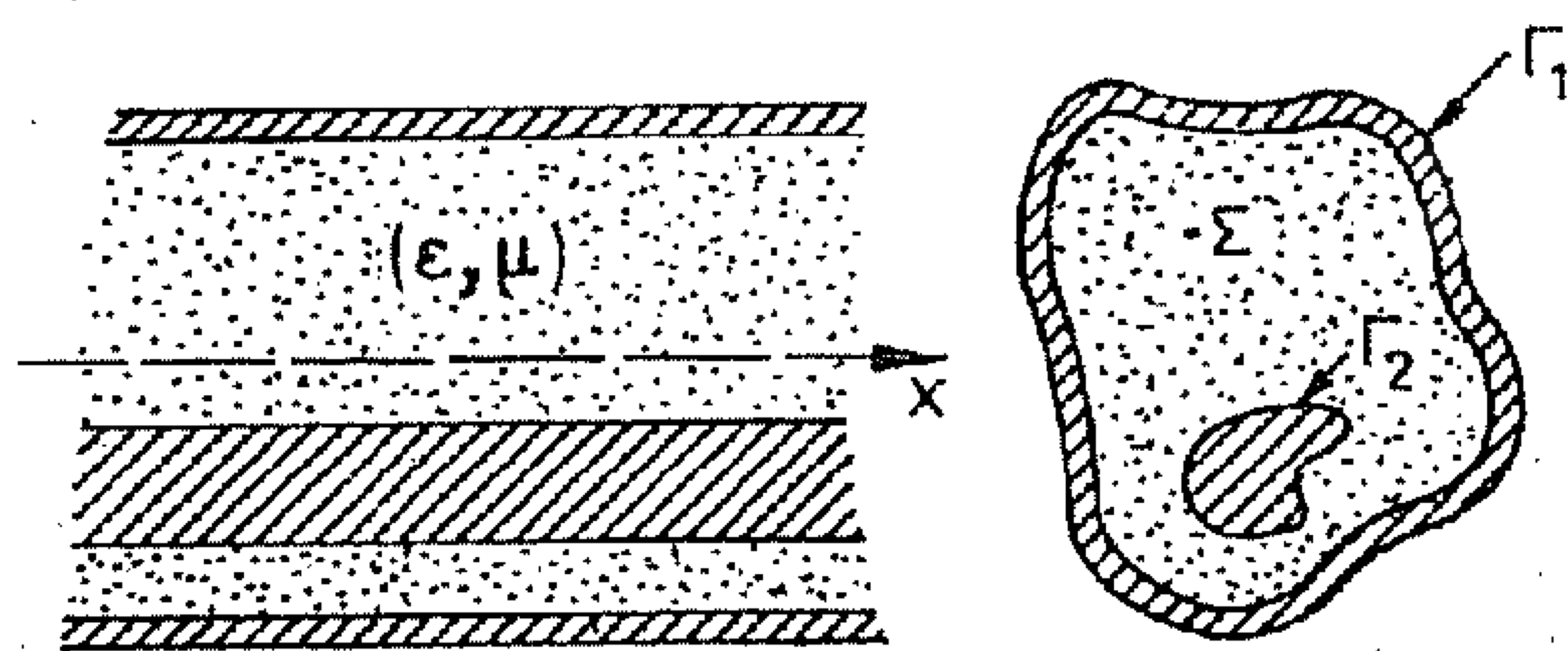
*) Στόν πίνακα περιλαμβάνονται οι συνθήκες, που απομνημονεύονται εύκολα. Οι υπόλοιπες προκύπτουν από αυτές αν χρησιμοποιηθοῦν οι σχέσεις $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ και $\vec{H} = \mu^{-1} \vec{B}$.

5. ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ

5.1. Είσαγωγή.

Οι κυματοδηγοί είναι φυσικά συστήματα, που τὰ χρησιμοποιούμε στην πράξη σαν φορείς "καθοδηγημένης" διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Έδω υποθέτουμε ότι τό σύστημα είναι "εύθύγραμμο" δηλ. ότι ορίζεται από μία επιφάνεια (ή καί πολλές) οποιασδήποτε μορφής, που ή μία της διάσταση, όμως, θεωρείται άπεριόριστη ("άξονας" τοῦ κυματοδηγοῦ).

Ανάμεσα στά διάφορα τέτοια φυσικά συστήματα (γραμμές μεταφοράς, όμοαξονικές ή διπλές, κυματοδηγοί μεταλλικοῦ σωλήνα, διηλεκτρικοῦ κυματοδηγοῦ, κυματοδηγοί πλακῶν) ενδιαφέρον παρουσιάζουν κυρίως οί όμοαξονικές γραμμές καί οί κοίλοι κυματοδηγοί μέ μεταλλικά τοιχώματα.



Σκ. 5-1 Ο κυματοδηγός είναι σύστημα που καθοδηγεί τή διάδοση τῶν ηλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων. Οί επιφάνειες Γ_1, Γ_2 , είναι αγωγιμες ενώ ο χώρος ανάμεσά τους είναι γεμάτος μέ ισότροπο καί όμογενές διηλεκτρικό υλικό. Η διάδοση γίνεται κατά τόν άξονα x .

Σέ όλες τύς περιπτώσεις τό υλικό, που περιορίζουν οί χαρακτηριστικές επιφάνειες $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ τοῦ κυματοδηγοῦ, θεωρείται ισότροπο καί όμογενές (ϵ, μ) . Κάθε φορά, ανάλογα μέ τή γεωμετρική μορφή τῶν επιφανειῶν Γ , μεταχειρισόμαστε καί τό κατάλληλο σύστη-

μα συντεταγμένων για τη μελέτη του κυματοδηγού.

Στό έξης θα φανταζόμαστε μονοχρωματικά αρμονικά κύματα (ω).

Συνήθως αναλύουμε τα πεδία \vec{E} και \vec{H} , σε κάθε σημείο Σ μέσα στον κυματοδηγό, σε μιά συνιστώσα κατά τη διεύθυνση του άξονα x και σε μιά συνιστώσα κάθετη πάνω στην προηγούμενη (μέ δείκτη T από τη λέξη transverse-έγκάρσιος) δηλαδή:

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_T, \quad \vec{H} = \vec{H}_x + \vec{H}_T \quad (5-1)$$

Με βάση την ανάλυση αυτή μπορούμε από πριν να ταξινομήσουμε τις διάφορες δυνατές λύσεις του συστήματος των εξισώσεων του Maxwell μέσα στον κυματοδηγό σε τρεις κύριες κατηγορίες (πού τις λέμε "κυματικούς τύπους" ή "ρυθμούς διάδοσης" -transmission modes) :

Κυματικός τύπος TM (transverse magnetic) ή τύπος (E). Στόν τύπο αυτό υπάρχει μόνο η έγκάρσια μαγνητική συνιστώσα \vec{H}_T , δηλαδή :

$$\vec{H}_x = 0 \quad \text{καί} \quad \vec{E}_x \neq 0 \quad (5-2)$$

Κυματικός τύπος TE (transverse electric) ή τύπος (H) όταν :

$$\vec{E}_x = 0 \quad \text{καί} \quad \vec{H}_x \neq 0 \quad (5-3)$$

Κυματικός τύπος TEM (transverse electromagnetic) όταν :

$$\vec{E}_x = 0 \quad \text{καί} \quad \vec{H}_x = 0 \quad (5-4)$$

Μπορεί να αποδειχτεί ότι οι τρεις παραπάνω κυματικοί τύποι παρουσιάζονται σε κυματοδηγούς με πολλαπλές επιφάνειες Γ , ενώ σε κοίλους κυματοδηγούς εμφανίζονται μόνο οι δύο πρώτοι τύποι (E) και (H) .

Όταν τά τοιχώματα των κυματοδηγών δεν είναι αρκετά καλού άγωγού, τότε εκτός από τους τύπους TM, TE και TEM μπορούν να έμ-

φανιστοῦν καὶ σύμπλοκοι "ὕβριδικοὶ κυματικοὶ τύποι" (E-H) .

Χάρη στή γραμμικότητα τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell τὰ κύματα , πού διαδίδονται μέσα στὸν κυματοδηγὸ μποροῦν νὰ εἶναι ὁποιοσδήποτε γραμμικὸς συνδυασμὸς κυματικῶν τύπων TEM, E καὶ H. Στὴν πράξη, ὅμως, ἐπιδιώκουμε νὰ εὐνοήσουμε τὴν κυματοδηγήση ἑνὸς μόνο κυματικοῦ τύπου (ὥστε νὰ ἐλέγχουμε τὴν "προσαρμογὴ" στὶς τροφοδοτήσεις συστημάτων ἀκτινοβολίας καὶ λήψης καὶ τὸ γενικότερο χειρισμὸ τοῦ κύματος). Τὰ παραπάνω τὰ πετυχαίνουμε δι-εγείροντας κατάλληλα τὸν κυματοδηγὸ καὶ διαλέγοντας κατάλληλα τίς διαστάσεις καὶ τὴ μορφή του.

Μιὰ ἄλλη συνέπεια τῆς γραμμικότητας τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell εἶναι, ὅπως διαπιστώσαμε στὰ προηγούμενα, ὅτι ἡ διάδοση κατὰ τὸν ἄξονα $+x$ μπορεῖ νὰ περιγραφεῖ, γιὰ ἕναν ὁρισμένο κυματικό τύπο, μὲ ἕναν ἐκθετικὸ "χωρικό" παράγοντα

$$e^{-\gamma x}$$

κοινὸ γιὰ ὅλες τίς συνιστώσες τῶν πεδίων. Ἡ σταθερὰ γ εἶναι ἡ σταθερὰ τῆς διάδοσης καὶ ἔχει τὴ μορφή

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (5-5)$$

ὅπου α ἡ σταθερὰ τῆς ἐξασθένησης καὶ β ἡ σταθερὰ τῆς φάσης.

Τὰ φασικά διανύσματα (phasors), λοιπόν, τῶν πεδίων γράφονται :

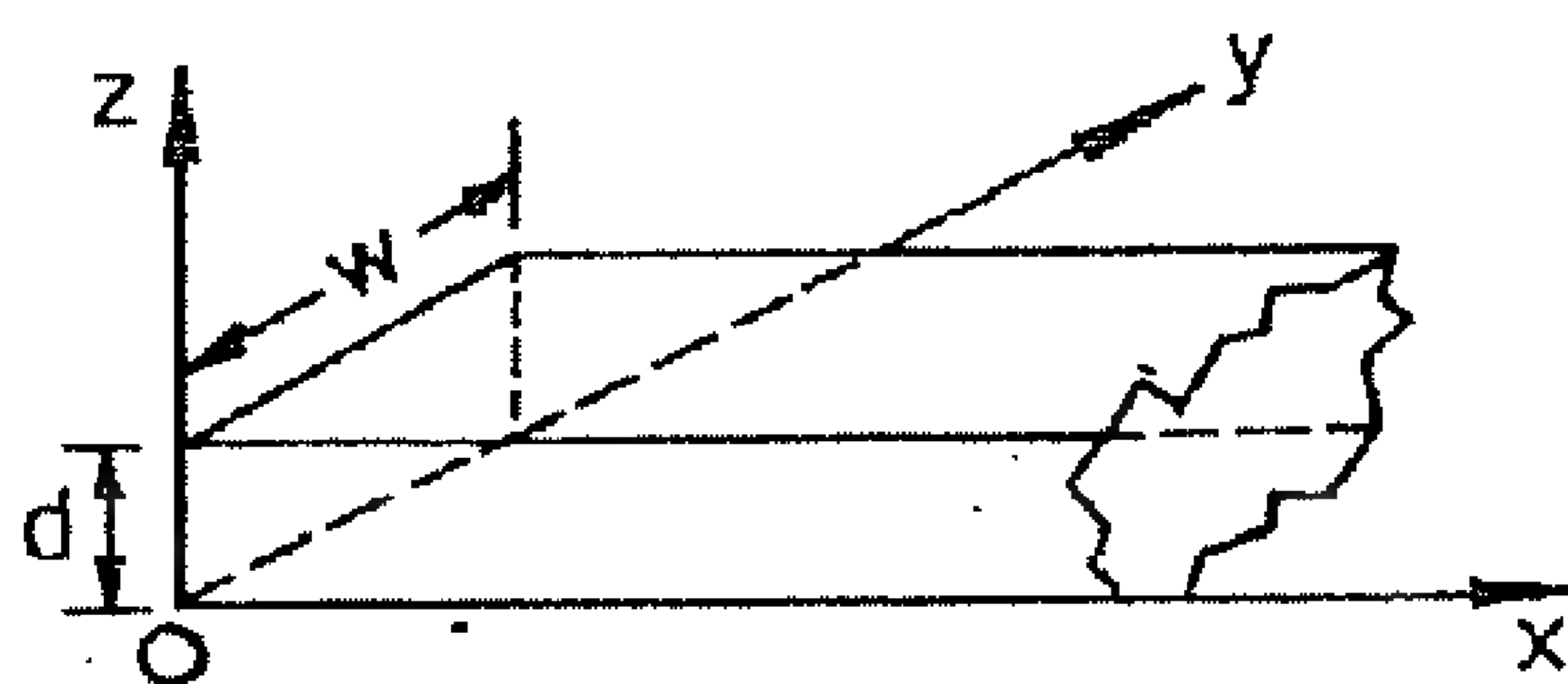
$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}(x, u, v) = \vec{E}(u, v) e^{-\gamma x} \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \vec{H}(x, u, v) = \vec{H}(u, v) e^{-\gamma x} \end{aligned} \right\} \quad (5-6)$$

ὅπου u καὶ v εἶναι οἱ ἐγκάρσιες συντεταγμένες τοῦ σημείου $\Sigma(\vec{r})$. Ἔτσι ὁδηγούμεστε στὴ λύση ἑνὸς "ἐπίπεδου προβλήματος" (δύο διαστάσεων) .

5.2. Μελέτη Όρθογώνιου Κυματοδηγού.

"Εστω ένας όρθογώνιος κοίλος κυματοδηγός, που περιορίζεται από μία τέλεια μεταλλική επιφάνεια και είναι γεμάτος με όμογε - νές ισότροπο διηλεκτρικό υλικό χωρίς απώλειες (ϵ, μ πραγματι - κές σταθερές και $\sigma = 0$)

Οι εξισώσεις του Maxwell για το έσωτερικό του κυματοδη - γού γράφονται :



Σχ. 5-2 Γεωμετρία όρθογώνιου κυματοδηγού

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-7)$$

"Αν περιοριστούμε στο άρμονικό κύμα

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} = \vec{E}(y, z) e^{j\omega t - \gamma x} \quad (5-8)$$

τότε οι (5-7) γίνονται :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j\omega \epsilon E_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z &= j\omega \epsilon E_y \\ -\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j\omega \epsilon E_z \end{aligned} \right\} \quad (5-9)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -j\omega \mu H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z &= -j\omega \mu H_y \\ -\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega \mu H_z \end{aligned} \right\} \quad (5-10)$$

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (5-11)$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (5-12)$$

Στις εξισώσεις (5-9) έως (5-12) θεωρούμε γνωστές τις συνιστώσες E_x και H_x και τις παραγώγους τους και τις μεταφέρουμε στα δεύτερα μέλη. Έτσι έχουμε :

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\epsilon E_x \quad (5-13)$$

$$\gamma H_z - j\omega\epsilon E_y = -\frac{\partial H_x}{\partial z} \quad (5-14)$$

$$-\gamma E_y - j\omega\epsilon E_z = \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (5-15)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu H_x \quad (5-16)$$

$$\gamma E_z + j\omega\mu H_y = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (5-17)$$

$$-\gamma E_y + j\omega\mu H_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (5-18)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \gamma E_x \quad (5-19)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = \gamma H_x \quad (5-20)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις ξεχωρίζουμε το σύστημα των (5-14) και (5-18) :

$$\left. \begin{aligned} \gamma H_z - j\omega \epsilon E_y &= -\frac{\partial H_x}{\partial z} \\ j\omega \mu H_z - \gamma E_y &= \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (5-21)$$

καί τό σύστημα τῶν (5-15) καί (5-17) :

$$\left. \begin{aligned} -\gamma H_y - j\omega \epsilon E_z &= \frac{\partial H_x}{\partial y} \\ j\omega \mu H_y + \gamma E_z &= -\frac{\partial E_x}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (5-22)$$

Ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν καί τῶν δύο αὐτῶν συστημάτων εἶναι :

$$\begin{vmatrix} \pm \gamma & -j\omega \epsilon \\ j\omega \mu & \mp \gamma \end{vmatrix} = -\gamma^2 - \omega^2 \epsilon \mu = -k_c^2 \quad (5-23)$$

ὅπου

$$k_c^2 \equiv \gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu = \gamma^2 + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = \gamma^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \neq 0 \quad (5-24)$$

καί $\frac{\omega}{v}$ ὁ κυματαριθμός τοῦ ἀρμονικοῦ κύματος ὅταν αὐτό διαδίδεται ἐλεύθερα μέσα στό ὕλικο.

Ἡ λύση τοῦ (5-21) εἶναι :

$$H_z = -\frac{1}{k_c^2} \begin{vmatrix} -\frac{\partial H_x}{\partial z} & -j\omega \epsilon \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} & -\gamma \end{vmatrix} = -\frac{1}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial H_x}{\partial z} + j\omega \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \quad (5-25)$$

$$\mathcal{E}_y = -\frac{1}{k_c^2} \begin{vmatrix} \gamma & -\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} \\ j\omega\mu & \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{1}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} \right) \quad (5-26)$$

Ἡ λύση τοῦ (5-22) εἶναι:

$$\mathcal{H}_y = -\frac{1}{k_c^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} & -j\omega\epsilon \\ -\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} & \gamma \end{vmatrix} = -\frac{1}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} - j\omega\epsilon \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} \right) \quad (5-27)$$

$$\mathcal{E}_z = -\frac{1}{k_c^2} \begin{vmatrix} -\gamma & \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} \\ j\omega\mu & -\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - j\omega\mu \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} \right) \quad (5-28)$$

Οἱ σχέσεις (5-25) ἕως (5-28) δύνουν τίς συνιστώσες \mathcal{E}_y , \mathcal{E}_z , \mathcal{H}_y , \mathcal{H}_z σάν συναρτήσεις τῶν παραγώγων τῶν \mathcal{E}_x καὶ \mathcal{H}_x . Ἄν τίς ἐκφράσεις αὐτές τίς πολλαπλασιάσουμε ἐπὶ τὸν παράγοντα $e^{j\omega t - \gamma x}$ καὶ πάρουμε τὸ πραγματικὸ μέρος θά ἔχουμε τίς ἀντίστοιχες συνιστώσες τῶν πραγματικῶν πεδίων \vec{E} καὶ \vec{H} .

Τίς παραπάνω σχέσεις τίς συνοψίζουμε :

$$\mathcal{E}_y = -\frac{1}{k_c^2} \left[\gamma \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} \right]$$

$$\mathcal{E}_z = -\frac{1}{k_c^2} \left[\gamma \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - j\omega\mu \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} \right]$$

$$\mathcal{H}_y = -\frac{1}{k_c^2} \left[-j\omega\epsilon \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} + \gamma \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} \right]$$

$$\mathcal{H}_z = -\frac{1}{k_c^2} \left[j\omega\epsilon \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} \right]$$

(5-29)

5.2.1. Έγκάρσιος ηλεκτρικός κυματικός τύπος (TE)

Στόν τύπο αυτόν είναι :

$$E_x = 0 \quad (5-30)$$

καί οι (5-29) παίρνουν τή μορφή :

$$\left. \begin{aligned} E_y &= -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ E_z &= \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_x}{\partial y} \\ H_y &= -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_x}{\partial y} \\ H_z &= -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_x}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (5-31)$$

Οι (5-31) δύνουν όλες τις συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε συνάρτηση με μιά μόνο, τήν H_x , που είναι ή μόνη άγνωστη. Η μορφή, επομένως της H_x θα καθορίσει τήν ακριβή μορφή του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

Χρησιμοποιώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις των (5-31) καί τήν (5-20) έχουμε :

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = -k_c^2 H_x$$

$$\nabla_T^2 H_x + k_c^2 H_x = 0 \quad (5-32)$$

Αν λύσουμε τήν (5-32) καί προσδιορίσουμε τήν H_x τότε από τις (5-31) θα προσδιορίσουμε καί τις άλλες συνιστώσες καί θα έχουμε

λύσει τό πρόβλημα τοῦ κυματικοῦ τύπου TE στόν ὀρθογώνιο κυματο-
δηγό.

Ἡ (5-32) μάς ἐπιτρέπει νά θεωρήσουμε ὅτι :

$$H_x = H'_0 U(y, z) \quad (5-33)$$

ὅπου ἡ συνάρτηση U ὑπακούει στή διαφορική ἐξίσωση κύματος:

$$\nabla_T^2 U + k_c^2 U = 0 \quad (5-34)$$

Γιά νά λύσουμε τήν (5-34) θεωροῦμε ὅτι ἡ λύση εἶναι συνάρτησιμέ
χωριζόμενες μεταβλητές, δηλαδή :

$$U(y, z) = f_1(y) f_2(z) \quad (5-35)$$

ὅποτε ἀντικαθιστώντας στήν (5-34) ἔχουμε :

$$\frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dy^2} + \frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dz^2} = -k_c^2$$

Γιά νά ἀληθεύει ὅμως αὕτη μέ τυχαῖα y καί z πρέπει κάθε προσθε-
τέος τοῦ πρώτου μέλους της νά εἶναι σταθερός, δηλαδή :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dy^2} &= -k_y^2 \\ \frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dz^2} &= -k_z^2 \end{aligned} \right\} \quad (5-36)$$

καί

$$k_y^2 + k_z^2 = k_c^2$$

καί

$$\frac{d^2 f_1}{dy^2} + k_y^2 f_1 = 0$$

$$\frac{d^2 f_2}{dz^2} + k_z^2 f_2 = 0$$

(5-37)

Οι (5-37) έχουν τρεις λύσεις :

$$f_1(y) = C_1 \cos k_y y + C_2 \sin k_y y \quad (5-38)$$

$$f_2(z) = C_3 \cos k_z z + C_4 \sin k_z z$$

όπου C_1, C_2, C_3, C_4 σταθερές της ολοκλήρωσης.

Άρα :

$$U = (C_1 \cos k_y y + C_2 \sin k_y y) (C_3 \cos k_z z + C_4 \sin k_z z) \quad (5-39)$$

και $\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_0' (C_1 \cos k_y y + C_2 \sin k_y y) (C_3 \cos k_z z + C_4 \sin k_z z) \quad (5-40)$

και

$$\mathcal{H}_x(\vec{r}, t) = \mathcal{H}_0' (C_1 \cos k_y y + C_2 \sin k_y y) (C_3 \cos k_z z + C_4 \sin k_z z) e^{j\omega t - \gamma x} \quad (5-41)$$

όπου (βλ. σχέση (5-24)) :

$$\gamma^2 = k_c^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \quad (5-42)$$

Πριν ακόμα προσδιορίσουμε τις σταθερές C_1, C_2, C_3, C_4 μπορούμε να κάνουμε την ακόλουθη διερεύνηση της (5-41) :

I. "Αν $\lambda = \frac{2\pi}{k_c}$

Τότε $\gamma = 0$ και τότε δεν υπάρχει καμιά δυνατότητα διάδοσης ("συνθήκη αποκοπής"). Τό αντίστοιχο μήκος κύματος λέγεται όρικό μήκος κύματος :

$$\lambda_{op} = \frac{2\pi}{k_c}$$

II. "Αν $\lambda > \frac{2\pi}{k_c}$ (δηλ. $\lambda > \lambda_{op}$)

Τότε τό γ είναι πραγματικό και ό παράγοντας $e^{-\gamma x}$ είναι

άπλά ένας παράγοντας εξασθένισης όσο αυξάνεται τό x , καί ή (5-41) εκφράζει μιá αρμονική ταλάντωση ($e^{j\omega t}$), πού όσο μεγαλώνει τό x , τό πλάτος της μικραίνει ενώ ή φάση της μένει άμετάβλητη. Ή διάδοση δέν είναι δυνατή παρά σέ πολύ μικρές μόνο άποστάσεις.

III. "Αν $\lambda < \frac{2\pi}{k_c}$ (δηλ. $\lambda < \lambda_{op}$)

Τότε τό γ είναι φανταστικό, $\gamma = j\beta$, καί ο παράγοντας $e^{-\gamma x} = e^{-j\beta x}$ δέν προκαλεί εξασθένιση αλλά μόνο άλλαγή φάσης, πού μέ τόν παράγοντα $e^{j\omega t}$ δύνουν τόν παράγοντα $e^{j(\omega t - \beta x)}$ τοῦ διαδόμενου κύματος κατά τόν άξονα $+x$.

Στά παρακάτω θά εργαστοῦμε γιά τήν περίπτωση (III) όταν δηλαδή $\lambda < \lambda_{op}$ όποτε

$$\gamma = j\beta = j \frac{2\pi}{\lambda_k} \quad (5-43)$$

όπου λ_k τό μήκος τοῦ κύματος πού διαδίδεται μέσα στόν κυματοδηγό. Από τήν (5-42) έχουμε :

$$\beta^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 - k_c^2 \quad (5-44)$$

$$\eta \quad \left(\frac{2\pi}{\lambda_k} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 - k_c^2$$

$$\eta \quad \frac{1}{\lambda_k^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{op}^2} \quad (5-45)$$

Ωστε τό μήκος κύματος λ_k μέσα στόν κυματοδηγό είναι μεγαλύτερο από τό μήκος κύματος στό άπεριόριστο διηλεκτρικό μέσο .

Προσδιορισμός των σταθερών C_1, C_2, C_3, C_4 της (5-40)

Δεδομένου ότι τα τοιχώματα του κυματοδηγού είναι έντελως αγωγικά, πρέπει η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου να είναι ίση με μηδέν. Θα πρέπει δηλαδή (βλ. σχ.5-2) για $y = 0$ και $y = w$ να είναι $E_z = 0$ και για $z = 0$ και $z = d$ να είναι $E_y = 0$.

Από τις (5-31) για $y = 0$ ή $y = w$, έχουμε :

$$\left. \frac{\partial H_x}{\partial y} \right|_{y=0}^{y=w} = 0 \quad (5-46)$$

και για $z = 0$, ή $z = d$ έχουμε :

$$\left. \frac{\partial H_x}{\partial z} \right|_{z=0}^{z=d} = 0 \quad (5-47)$$

Από την (5-40) έχουμε :

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = H'_0 (-k_y C_1 \sin k_y y + k_y C_2 \cos k_y y) (C_3 \cos k_z z + C_4 \sin k_z z) \quad (5-48)$$

και

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = H'_0 (C_1 \cos k_y y + C_2 \sin k_y y) (-k_z C_3 \sin k_z z + k_z C_4 \cos k_z z) \quad (5-49)$$

Εφαρμόζοντας την (5-46) στην (5-48) έχουμε :

$$\begin{aligned} C_1 \sin k_y w &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5-50)$$

και την (5-47) στην (5-49) έχουμε :

$$\begin{aligned} C_3 \sin k_z d &= 0 \\ C_4 &= 0 \end{aligned} \quad (5-51)$$

Συνοψίζοντας, για να έχουμε κύμα μέσα στον κυματοδηγό, σύμφωνα με τις (5-50) και (5-51), πρέπει :

$$C_1, C_3 \neq 0$$

$$C_2, C_4 = 0$$

$$\sin k_y w = 0$$

$$\eta \quad k_y w = 0, \pi, 2\pi, \dots, m\pi$$

$$\sin k_z d = 0$$

$$\eta \quad k_z d = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$$

$$(5-52)$$

όπου m και n ακέραιοι θετικοί ή μηδέν.

Όποτε οι (5-40), (5-48), (5-49) γίνονται :

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_0 \cos k_y y \cos k_z z \quad (5-53)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} = -\mathcal{H}_0 k_y \sin k_y y \cos k_z z \quad (5-54)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} = -\mathcal{H}_0 k_z \cos k_y y \sin k_z z \quad (5-55)$$

όπου

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}'_0 C_1 C_3 \quad (5-56)$$

Χρησιμοποιώντας στις (5-31) τις (5-8), (5-43), (5-54) και (5-55) έχουμε τελικά :

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_0 \cos k_y y \cos k_z z e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$\mathcal{H}_y = \frac{j\beta k_y}{k_c^2} \mathcal{H}_0 \sin k_y y \cos k_z z e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$\mathcal{H}_z = \frac{j\beta k_z}{k_c^2} \mathcal{H}_0 \cos k_y y \sin k_z z e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$\mathcal{E}_x = 0$$

$$(5-57)$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu k_z}{k_c^2} H_0 \cos k_y y \sin k_z z e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (5-57)$$

$$E_z = \frac{-j\omega\mu k_y}{k_c^2} H_0 \sin k_y y \cos k_z z e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$\text{όπου } k_y = \frac{m\pi}{w}, \quad k_z = \frac{n\pi}{d}, \quad (5-58)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots \text{ και } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{άλλα } (m, n) \neq (0, 0) \quad (5-59)$$

$$\text{και } k_c^2 = k_y^2 + k_z^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{w^2} + \frac{n^2}{d^2} \right) \quad (5-60)$$

Από την τελευταία και έπειδή

$$k_c = \frac{2\pi}{\lambda_{op}} \quad (5-61)$$

έχουμε :

$$\boxed{\frac{1}{\lambda_{op}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2}{w^2} + \frac{n^2}{d^2}}} \quad (5-62)$$

όπου λ_{op} τό όρικό μήκος κύματος, πού καθορίζεται από τό ζευγάρι των άκεραίων (m, n) . Από τίς (5-44), (5-60), (5-62) έχουμε :

$$\beta^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_k} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 - \pi^2 \left(\frac{m^2}{w^2} + \frac{n^2}{d^2} \right) = 4\pi^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{op}^2} \right) \quad (5-63)$$

Ωστε, φάχνοντας για λύσεις στόν κυματικό τύπο TE καταλήξαμε στίς (5-57), πού περιγράφουν την πεδιακή κατανομή μέσα στόν κυματοδηγό. Για κάθε ζευγάρι (m, n) έχουμε και μία συγκεκριμένη πεδιακή κατανομή, πού χαρακτηρίζεται ως TE_{mn} και έχει τό όρικό μήκος κύματος της (5-62) (συνάρτηση των εγκάρσιων διαστάσεων του κυ-

κυματοδηγοῦ (d, w), καὶ σταθερά φάσης, αὐτὴν πού δύνει ἡ (5-63) .

Π α ρ ᾱ δ ε ι γ μ α ὁ τύπος TE_{10} . Στόν τύπο αὐτό ἔχουμε $m=1$,

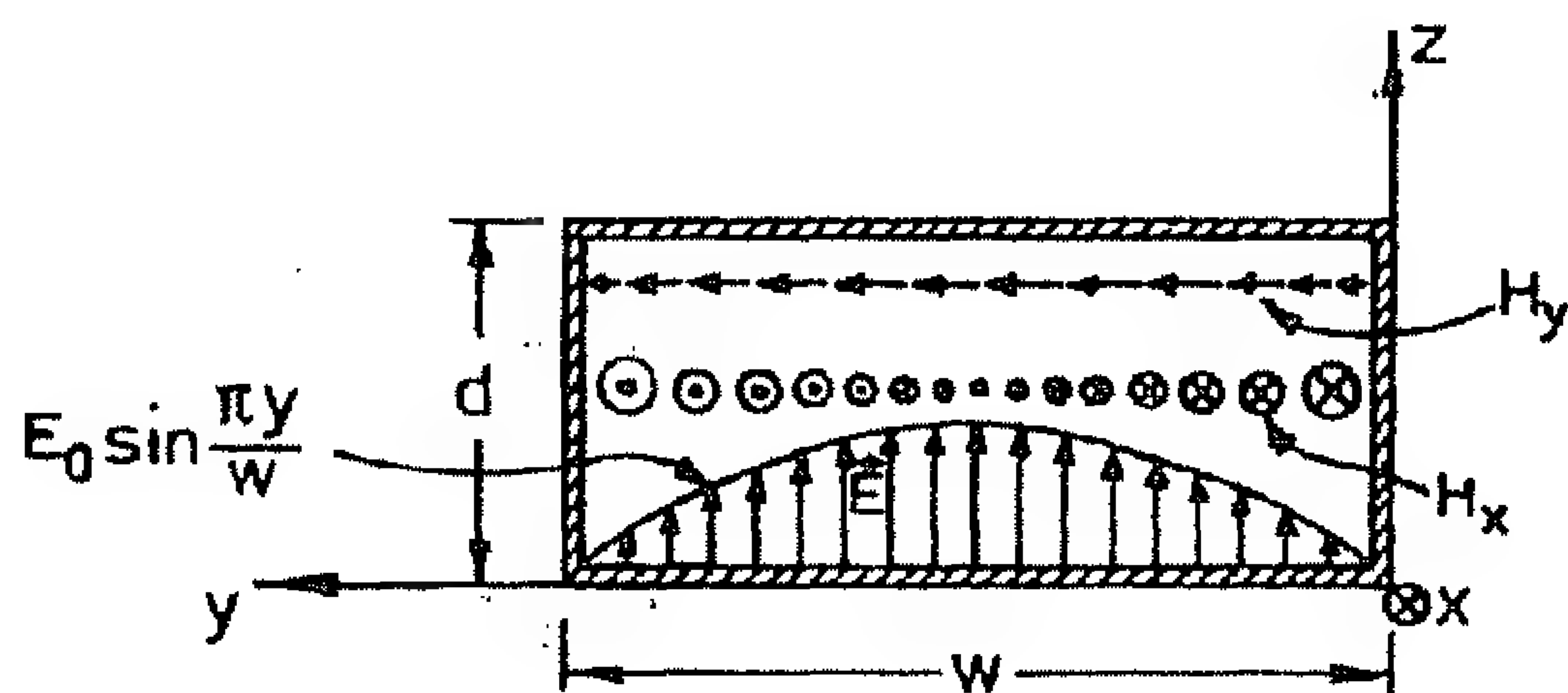
$n=0$ καὶ ἐπομένως ὁριζό μήκος κύματος:

$$\frac{1}{\lambda_{10,op}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{w^2}} = \frac{1}{2w} \quad (5-64)$$

καὶ
$$k_y = \frac{\pi}{w} \quad , \quad k_z = 0 \quad , \quad \beta_{10}^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \frac{\pi^2}{w^2} \quad (5-65)$$

Ἡ ἀντίστοιχη πεδιακή κατανομή εἶναι :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_x &= \mathcal{H}_0 \cos \frac{\pi y}{w} e^{j(\omega t - \beta_{10} x)} \\ \mathcal{H}_y &= \frac{j\beta_{10} w}{\pi} \mathcal{H}_0 \sin \frac{\pi y}{w} e^{j(\omega t - \beta_{10} x)} \\ \mathcal{H}_z &= 0 \\ \mathcal{E}_x &= 0 \\ \mathcal{E}_y &= 0 \\ \mathcal{E}_z &= \frac{-j\omega \mu w}{\pi} \mathcal{H}_0 \sin \frac{\pi y}{w} e^{j(\omega t - \beta_{10} x)} \end{aligned} \quad (5-66)$$



Σχ. 5-3 Μία πρώτη παραστατική περιγραφή τῆς πεδιακῆς κατανομῆς τοῦ τύπου TE_{10} (βλ. καὶ σχ. 5-4)

Στό σχῆμα 5-3 δύνεται μιά παραστατική περιγραφή τῆς πεδιακῆς κατανομῆς σέ μιά ἐγκάρσια διατομή τοῦ κυματοδηγοῦ, ἀνεξάρτητα γιὰ τὴ κάθε συνιστώσα.

Μέ τη βοήθεια της κυματικής αντίστασης του κυματοδηγού για τον τύπο TE, που ορίζεται από την:

$$Z_{TE} = \frac{Z}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}} = \frac{Z}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{op}}\right)^2}} \quad (5-67)$$

όπου $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ (5-68)

ή γνωστή μας κυματική αντίσταση του μέσου, μπορούμε να γράψουμε τις (5-57) έτσι^{*)}:

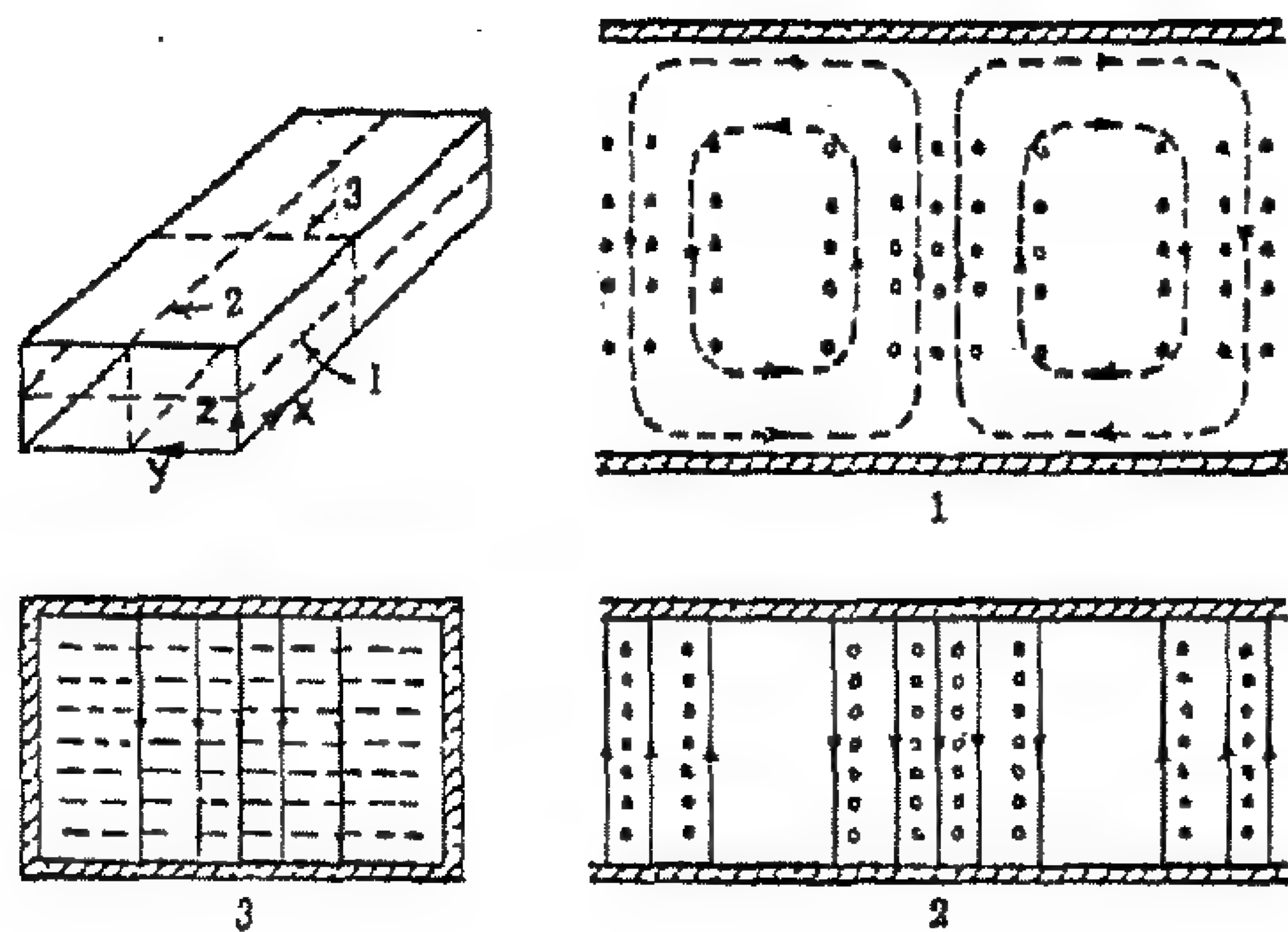
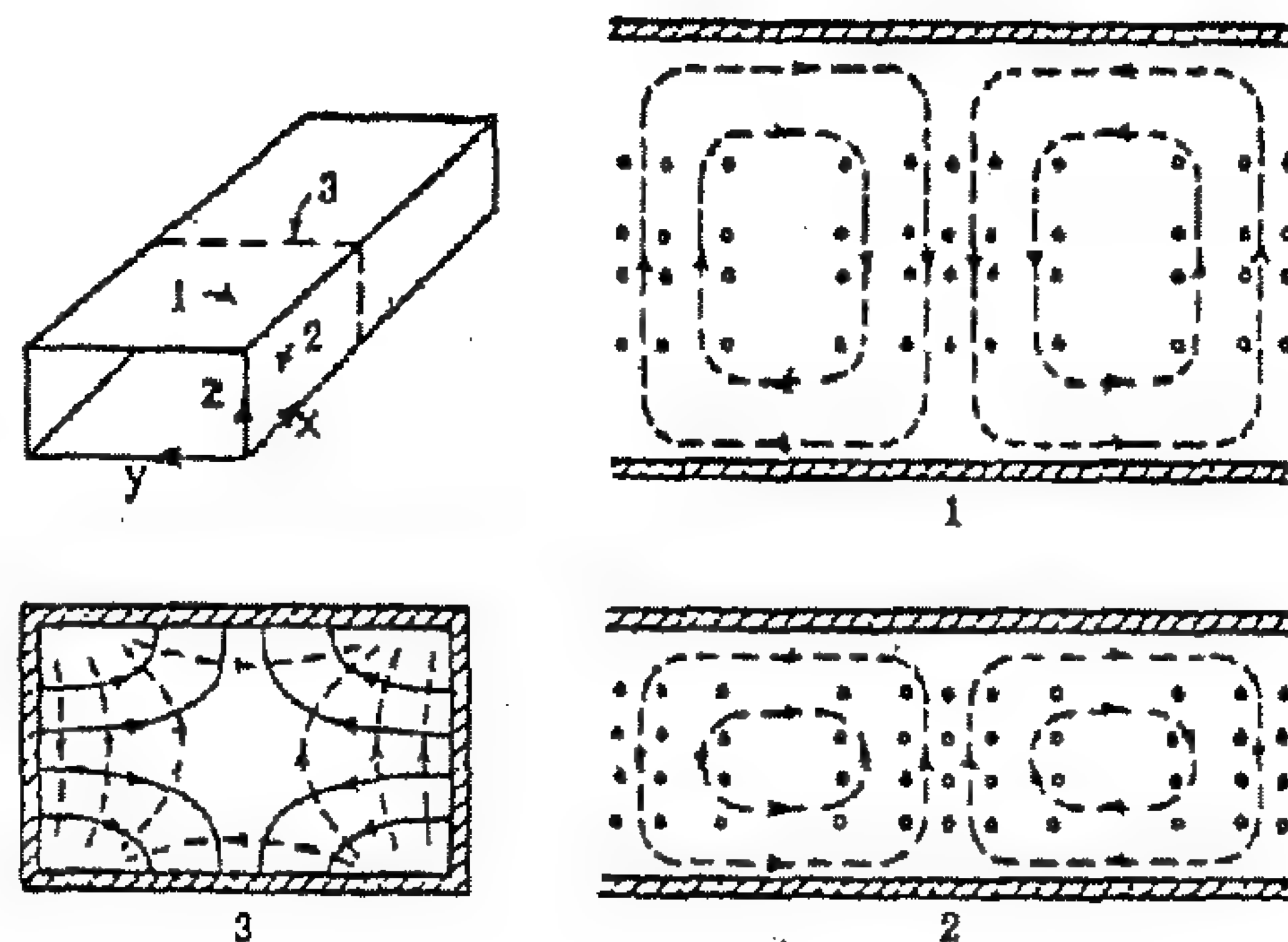
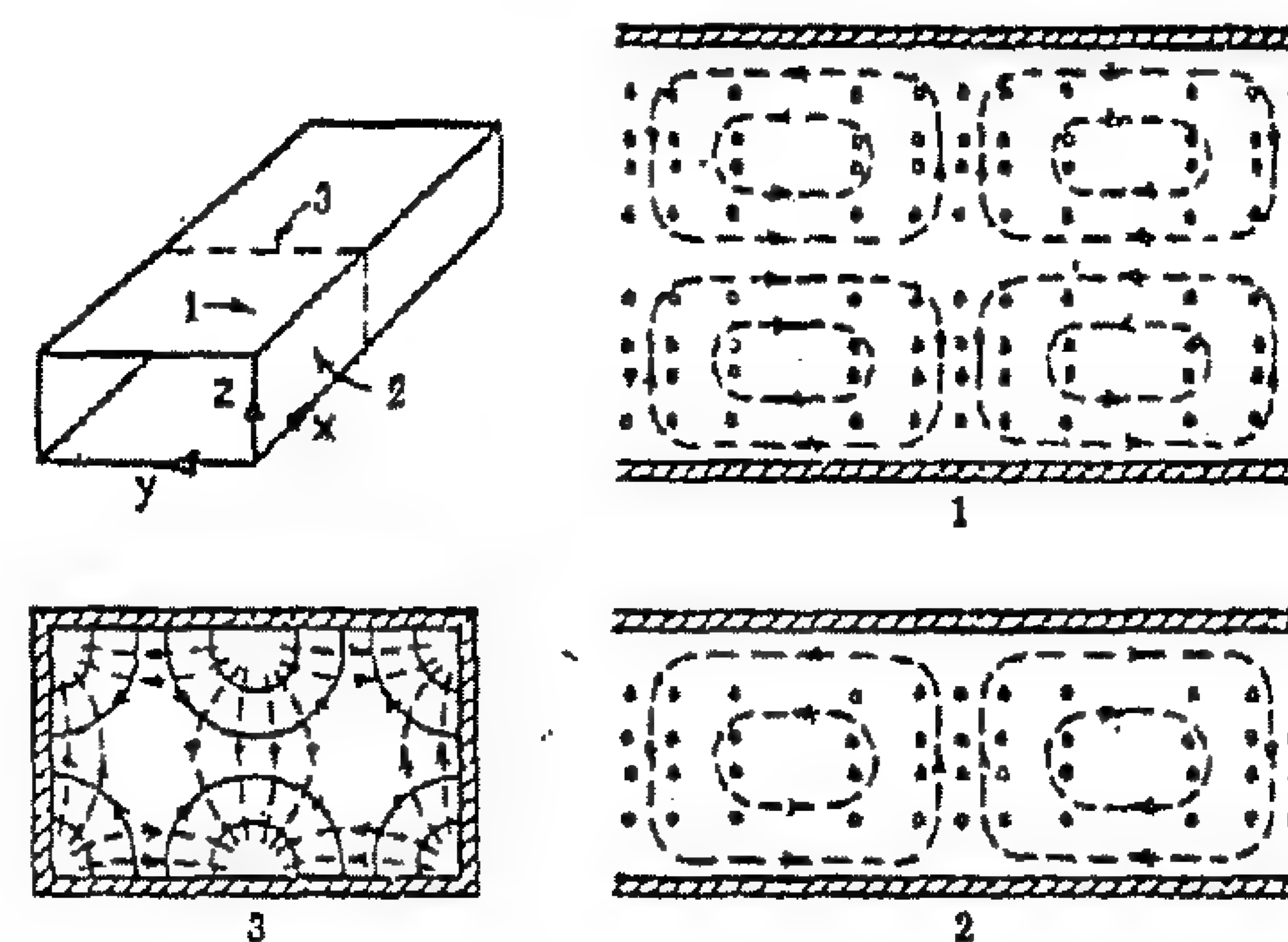
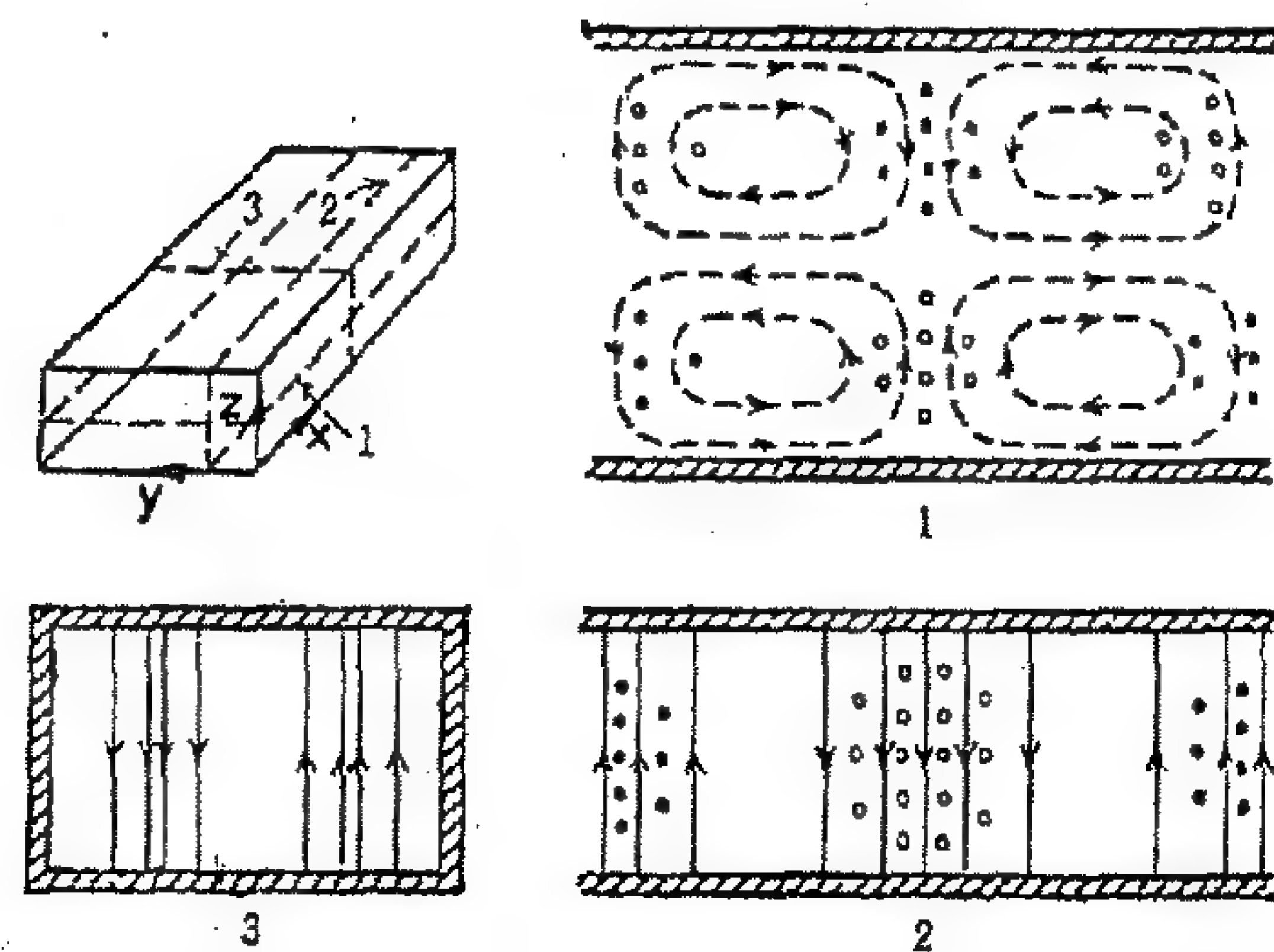
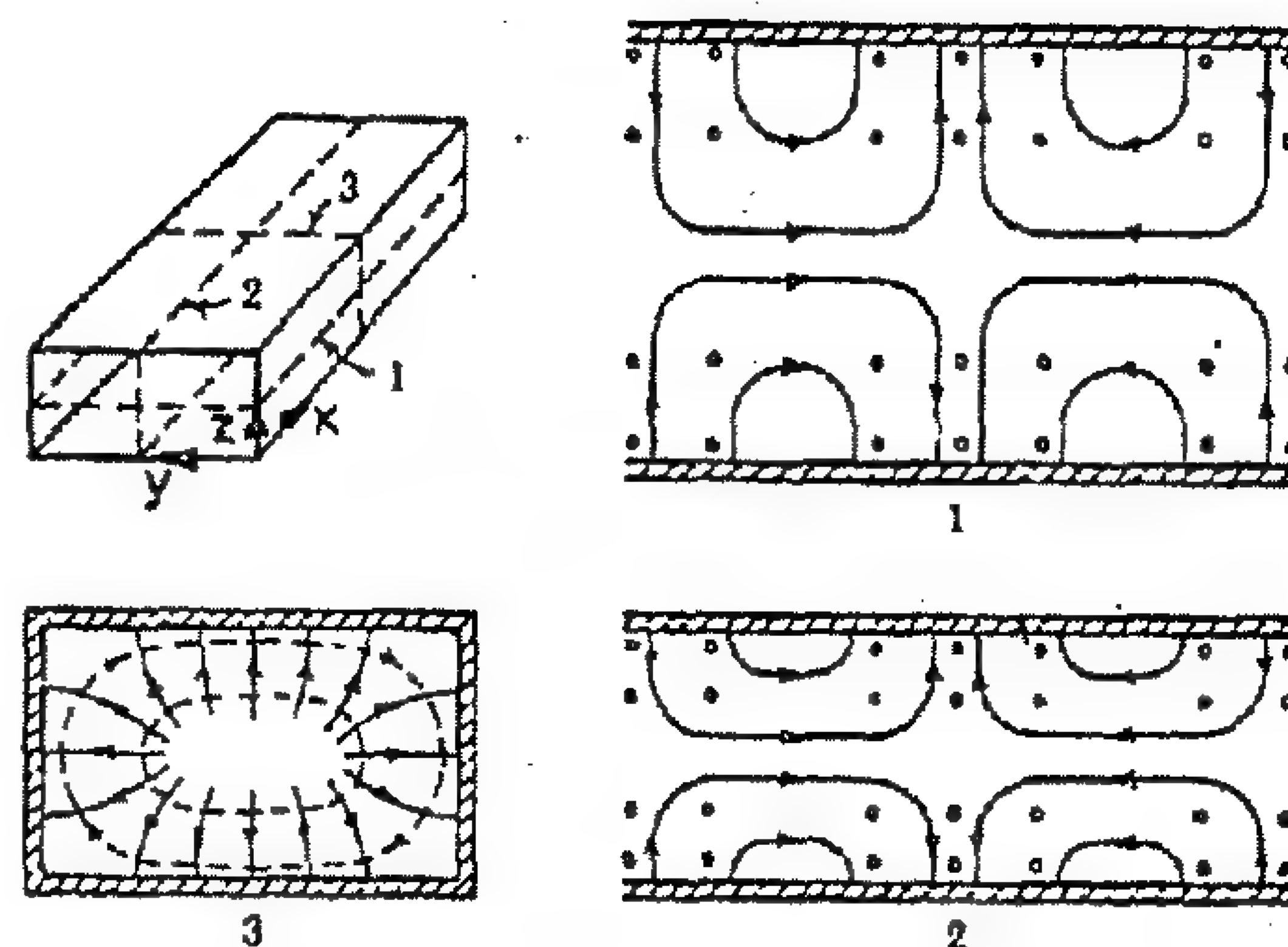
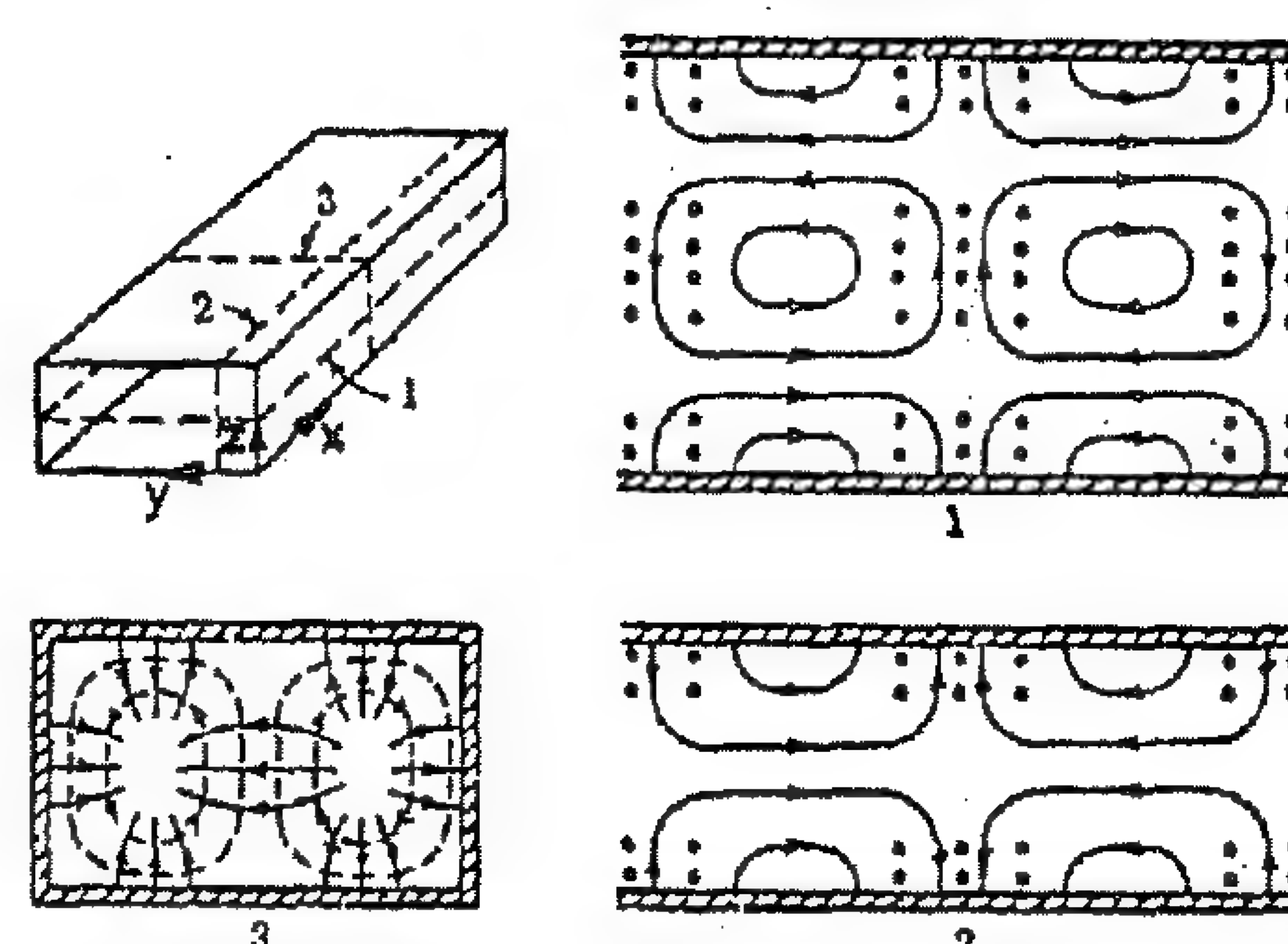
Τ Υ Π Ο Σ	$E_x = 0$
	$E_y = jZ \frac{k_z}{k_c} \frac{\lambda_{op}}{\lambda} H_0 \cos k_y y \sin k_z z e^{j(\omega t - \beta x)}$
	$E_z = -jZ \frac{k_y}{k_c} \frac{\lambda_{op}}{\lambda} H_0 \sin k_y y \cos k_z z e^{j(\omega t - \beta x)}$
	$H_x = H_0 \cos k_y y \cos k_z z e^{j(\omega t - \beta x)}$
TE	$H_y = -\frac{E_z}{Z_{TE}}$
	$H_z = \frac{E_y}{Z_{TE}}$

(5-69)

Στό σχ. 5-4 δίνεται η πεδιακή κατανομή διαφόρων κυματικών τύπων σε ορθογώνιο κυματοδηγό.

*)

Για κύματα που τρέχουν προς τό $-x$ ($e^{j(\omega t + \beta x)}$), αλλάζουν πρόσημο οι όροι που περιέχουν τό Z_{TE} .

TE_{10}  TE_{11}  TE_{21}  TE_{20}  TM_{11}  TM_{21} 

Σχ. 5-4 Πεδιακή κατανομή διαφόρων κυματικών τύπων σε ορθογώνιο κυματοδηγό

5.2.2. Έγκάρσιος μαγνητικός κυματικός τύπος (TM):

Όπως στον κυματικό τύπο TE, έτσι και στον τύπο TM, ξεκινώντας από τις (5-29), απαλείφοντας

$$\mathcal{H}_x = 0 \quad (5-70)$$

και υποθέτοντας ότι :

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}'_0 U(y, z) \quad (5-71)$$

καταλήγουμε στην ίδια διαφορική εξίσωση της U δηλ. την (5-34), που έχει λύση την (5-39). Από αυτήν και από την (5-71), με εφαρμογή των κατάλληλων οριακών συνθηκών προσδιορίζουμε τις εξισώσεις του πεδίου.

Και πάλι με την βοήθεια της κυματικής αντιστάσης του κυματοδηγού για τον κυματικό τύπο TM :

$$Z_{TM} = Z \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{op}}\right)^2} = Z \sqrt{1 - \left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2} \quad (5-72)$$

μπορούμε να εκφράσουμε τις συνιστώσες του πεδίου, ανάλογα με τις (5-69)*)

Τ Υ Π Ο Σ TM	$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_0 \sin k_y y \sin k_z z e^{j(\omega t - \beta x)}$	(5-73)
	$\mathcal{H}_y = \frac{j}{Z} \frac{k_z}{k_c} \frac{\lambda_{op}}{\lambda} \mathcal{E}_0 \sin k_y y \cos k_z z e^{j(\omega t - \beta x)}$	
	$\mathcal{H}_z = \frac{-j}{Z} \frac{k_y}{k_c} \frac{\lambda_{op}}{\lambda} \mathcal{E}_0 \cos k_y y \sin k_z z e^{j(\omega t - \beta x)}$	
	$\mathcal{E}_y = Z_{TM} \mathcal{H}_z$	
	$\mathcal{E}_z = -Z_{TM} \mathcal{H}_y$	
	$\mathcal{H}_x = 0$	

*) Για κύματα, που τρέχουν προς το $-x$ ($e^{j(\omega t + \beta x)}$), αλλάζουν πρόσημο οι όροι που περιέχουν το Z_{TM} .

όπου

$$k_y = \frac{m\pi}{w}, \quad k_z = \frac{n\pi}{d}, \quad k_c^2 = k_y^2 + k_z^2 \quad (5-74)$$

μέ $m = 1, 2, 3, \dots$ και $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\lambda_{op} = \frac{2\pi}{k_c} \quad (5-75)$$

$$\beta^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - k_c^2 \quad (5-76)$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_k} \quad (5-77)$$

και

$$\frac{1}{\lambda_k^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{op}^2} \quad (5-78)$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η . Όπως φαίνεται από τις (5-69) δεν υπάρχει κυματικός τύπος TE_{00} , ενώ από τις (5-73) φαίνεται ότι δεν υπάρχουν οι κυματικοί τύποι TM_{on} ή TM_{mo} , δηλ. τά m και n δεν παίρνουν τιμή μηδέν.

5.2.3. Μερικά πρακτικά συμπεράσματα.

Από τα πιο πάνω βλέπουμε ότι για κάθε ορθογώνιο κυματοδηγό με ορισμένες εγκάψεις διαστάσεις (w, d), γεμάτο με διηλεκτρικό υλικό (μ, ϵ), και για κάθε επιθυμητό κυματικό τύπο (TE_{mn} , TM_{mn}) υπάρχει ένα ό ρ ι κ ό μ η κ ο ς κύματος λ_{op} :

$$\frac{1}{\lambda_{op}} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{w}\right)^2 + \left(\frac{n}{d}\right)^2} \quad (5-79)$$

πού αντιστοιχεί σε μία ε λ ά χ ι σ τ η ό ρ ι κ ή σ υ χ ν ό τ η τ α f_{op} :

$$f_{op} = \frac{v}{\lambda_{op}} = \frac{1}{\lambda_{op} \sqrt{\epsilon \mu}} \quad (5-80)$$

όπου v ή ταχύτητα του κύματος στο ελεύθερο διηλεκτρικό .
Κάτω από τη συχνότητα αυτή ή διάδοση ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι αδύνατη έπειδή υπάρχει πολύ μεγάλη εξασθένηση.

Η σταθερά της διάδοσης που αντιστοιχεί σε κάθε τύπο (m, n) είναι φανταστική :

$$\gamma = j\beta \quad (5-81)$$

$$\text{όπου} \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda_k} \quad (5-82)$$

ή σταθερά φάσης του τύπου (m, n) και λ_k τό μήκος κύματος του τύπου αυτού μέσα στον κυματοδηγό :

$$\frac{1}{\lambda_k^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{op}^2} \quad (5-83)$$

$$\text{ή} \quad \lambda_k = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{op}}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}} \quad (5-84)$$

$$\text{όπου} \quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{f \sqrt{\epsilon \mu}} \quad (5-85)$$

τό μήκος κύματος στο ελεύθερο διηλεκτρικό . Δηλαδή :

$$\lambda_k > \lambda \quad (5-86)$$

Η σταθερά φάσης γράφεται :

$$\beta = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{op}^2}} \quad (5-87)$$

Ἡ " ταχύτητα φάσης " u_p , μέ τήν ὁποία διαδίδεται ἡ ἰσοφασική ἐπιφάνεια μέσα στόν κυματοδηγό εἶναι:

$$u_p = f \lambda_k = u \frac{\lambda_k}{\lambda} \quad (5-88)$$

$$u_p = \frac{u}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{op}}\right)^2}} = \frac{u}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}} \quad (5-89)$$

Ἡ ταχύτητα μέ τήν ὁποία διαδίδεται ἡ ἐνέργεια μέσα στόν κυματοδηγό καί μέ τήν ὁποία διαδίδεται καί κάθε σῆμα διαμορφώσεως τοῦ ΗΜ κύματος λέγεται " ταχύτητα ὁμάδας " (u_g) καί ἀποδύχνεται ὅτι:

$$u_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (5-90)$$

Τήν (5-87) τή γράφουμε ὡς ἑξῆς :

$$\beta^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda_{op}^2} = \frac{\omega^2}{u^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda_{op}^2} \quad (5-91)$$

Ἀπό αὐτήν ἔχουμε :

$$2\beta d\beta = \frac{1}{u^2} 2\omega d\omega \quad (5-92)$$

καί

$$u_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \beta \left(\frac{u}{\omega} \right) u = \frac{2\pi}{\lambda_k} \frac{\lambda}{2\pi} u$$

ἢ

$$u_g = u \cdot \frac{\lambda}{\lambda_k} \quad (5-93)$$

ή

$$v_g = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{op}}\right)^2} = v \sqrt{1 - \left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2} \quad (5-94)$$

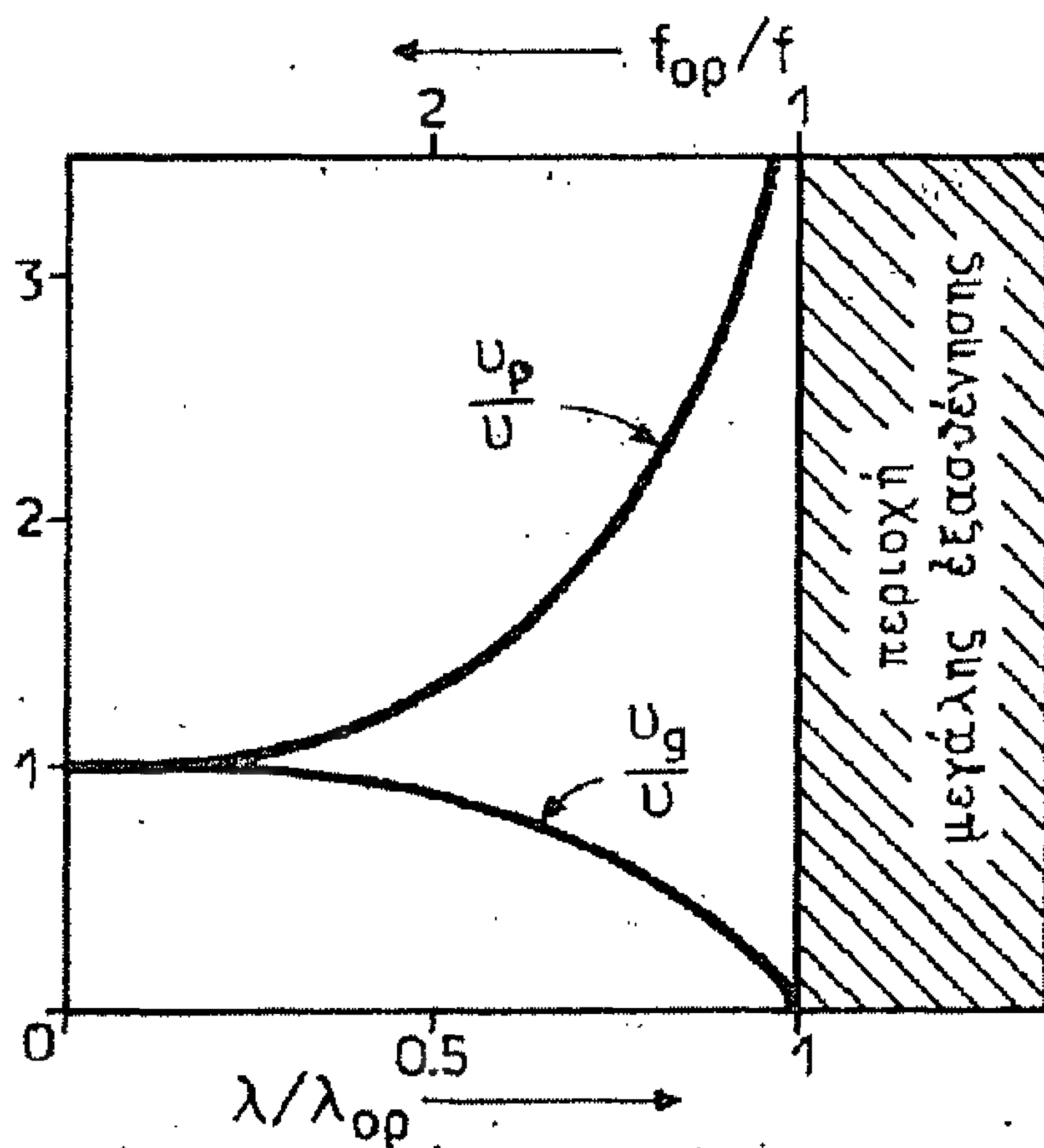
Από τις (5-88) και (5-93) προκύπτει:

$$v_p v_g = v^2$$

(5-95)

Στό διάγραμμα του σχ.5-5 παριστάνεται η μεταβολή των σχετικών ταχυτήτων v_p/v και v_g/v σαν συνάρτηση των λ/λ_{op} ή f_{op}/f .

Παρατήρηση. Στόν κυματικό τύπο m, n (TE_{mn} ή TM_{mn}) ο δείκτης m εκφράζει τον αριθμό των "μίσων" ήμυτονοειδών διακυμάνσεων πλάτους της αντίστοιχης συνιστώσας κατά τη διεύθυνση y και σ' όλο τό πλάτος



Σχ. 5-5. Σχετικές τιμές της ταχύτητας φάσης v_p και της ταχύτητας ομάδας v_g , μέσα σ' έναν ορθογώνιο κυματοδηγό, ως προς την ταχύτητα v στο ελεύθερο dieλεκτρικό.

w της διατομής του ορθογώνιου κυματοδηγού, ενώ ο δείκτης n τον αντίστοιχο αριθμό κατά τη διεύθυνση του άξονα z και σ' όλο τό ύψος d της διατομής. Π.Χ. ο TE_{10} σ' όλο τό πλάτος w εμφανίζει μισή ήμυτονοειδή διακύμανση (τό όρισμα $\frac{\pi y}{w}$ μεταβάλλεται από 0 έως π), γιὰ κάθε συνιστώσα, ενώ σ' όλο τό ύψος d δέν εμφανίζεται καμιά διακύμανση. 'Ο TE_{22} εμφανίζει σ' όλο τό w και σ' όλο τό d μιὰ ολόκληρη ήμυτονοειδή διακύμανση.

5.2.4. Έξασθενήση του κύματος κατά τή διάδοση μέσα σέ ὀρθογώνιο κυματοδηγό (Οἱ βασικές σχέσεις).

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε ὅτι τό κύμα, καθώς διαδύδεται μέσα στόν κυματοδηγό, δέν παθαίνει ἐξασθενήση. Στήν πράξη, ὅμως, δέν συμβαίνει αὐτό, γιατί καί τά τοιχώματα τοῦ κυματοδηγοῦ δέν ἔχουν ἄπειρη ἀγωγιμότητα ($\sigma_c < \infty$) καί τό διηλεκτρικό δέν ἔχει μηδενική ἀγωγιμότητα ($\sigma_d \neq 0$). Ὡστε, ἡ μεταδιδόμενη ἰσχύς πολλαπλασιάζεται ἐπί τόν παράγοντα $e^{-2\alpha_t x}$, ὅπου α_t ἡ τιμή τοῦ ὁλικοῦ συντελεστῆ ἐξασθενήσης. Δηλαδή :

$$P = P_0 e^{-2\alpha_t x} \quad (5-96)$$

Ἡ ἐξασθενήση ΔL , στή δοσμένη ἀπόσταση Δx , σέ decibel (dB) εἶναι :

$$\Delta L = 10 \log \frac{P_0}{P} = 10 \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln \frac{P_0}{P} = 8,686 \alpha_t \Delta x = A_t \Delta x \quad (5-97)$$

ἀπό ὅπου προκύπτει ἡ ἐξασθενήση ἀνά μονάδα μήκους :

$$A_t = \frac{\Delta L}{\Delta x} = 8,686 \alpha_t \left(\frac{\text{dB}}{\text{m}} \right) \quad (5-98)$$

Ὁ ὁλικός συντελεστής ἐξασθενήσης α_t γράφεται σάν ἄθροισμα δύο ὀρων :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_t &= \alpha_c + \alpha_d \\ \text{καί ἄρα} \quad A_t &= A_c + A_d \end{aligned} \right\} \quad (5-99)$$

ὅπου ὁ α_c ἀφορᾷ τήν ἐξασθενήση λόγω τῆς μή τέλει ἀγωγιμότητας τῶν τοιχωμάτων καί ὁ α_d τήν ἐξασθενήση λόγω κακῆς ποιότητος τοῦ διηλεκτρικοῦ.

Σέ ὀρθογώνιο κυματοδηγό (w,d) καί γιά τόν κυματικό τύπο TE_{mn} ἀποδείχνεται ὅτι εἶναι :

$$(\alpha_c)_{TE_{mn}} = \frac{2R_s}{dz_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}} \left\{ \left(1 + \frac{d}{w}\right) \left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2\right] \left[\frac{\frac{d}{w} \left(\frac{d}{w} m^2 + n^2\right)}{\frac{d^2}{w^2} m^2 + n^2} \right] \right\} \quad (5-100)$$

ὅπου R_s ἡ λεγόμενη ἐπιδερμική ἀντίσταση τῶν τοιχωμάτων :

$$R_s = \frac{1}{\sigma_c x_0} = \sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}} \quad (5-101)$$

(x_0 τό βάθος διείσδυσης), καί

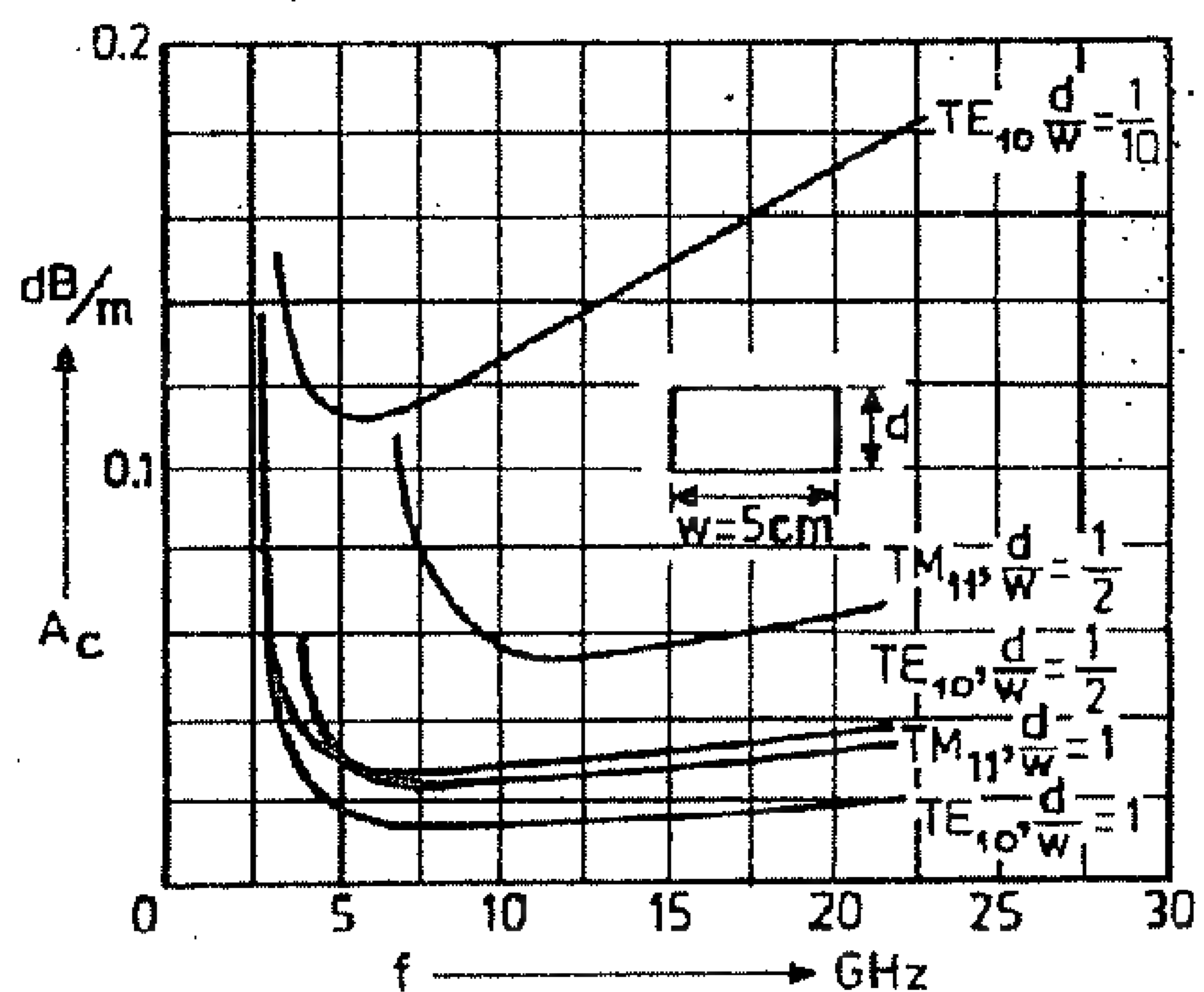
$$Z_d = \sqrt{\frac{\mu_d}{\epsilon_d}} \quad (5-102)$$

ἡ κυματική ἀντίσταση τοῦ διηλεκτρικοῦ.

Ο συντελεστής ἐξασθένησης α_d ἀποδείχνεται ὅτι γιά κάθε τύπο κυματοδηγοῦ εἶναι :

$$\alpha_d = \frac{\sigma_d Z_d}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}} \quad (5-103)$$

Μερικά παραδείγματα ἐξασθένησης μέσα σέ ὀρθογώνιο κυματοδηγό φαίνονται στό διάγραμμα τοῦ σχ. 5-6 .



Σχ. 5-6 Διαγράμματα τῆς ἐξασθένησης ἀνά μονάδα μήκους, α_c (dB/m) μερικῶν κυματικῶν τύπων ἑνός ὀρθογώνιου κυματοδηγοῦ, μέ $w=5\text{cm}$, γιά διάφορα d , σέ συνάρτηση μέ τή συχνότητα. Ο κυματοδηγός αὐτός εἶναι ἀπό χαλκό .

5.3. Μελέτη Κυκλικού Κυλινδρικού Κυματοδηγού.

Στόν κυκλικό κυλινδρικό κυματοδηγό, μέ έργασία ανάλογη μέ εκείνη , πού κάμαμε στή μελέτη τοῦ ὀρθογώνιου κυματοδηγοῦ, καταλήγουμε στό ὅτι γιά τόν ἐγκάρσιο ἡλεκτρικό κυματικό τύπο (TE) , ὅλες οἱ συνιστώσες τοῦ πεδίου μποροῦν νά ἐκφραστοῦν σέ συνάρτηση μέ τήν H_z , πού ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση :

$$\nabla_T^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \quad (5-104)$$

ένῳ γιά τόν κυματικό τύπο TM ὅλες οἱ συνιστώσες μποροῦν νά ἐκφραστοῦν σέ συνάρτηση μέ τήν E_z , πού πρέπει νά ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση :

$$\nabla_T^2 E_z + k_c^2 E_z = 0 \quad (5-105)$$

$$\text{ὅπου εἶναι :} \quad H_z = H'_0 \cdot U(\rho, \psi) \quad (5-106)$$

$$E_z = E'_0 \cdot U(\rho, \psi) \quad (5-107)$$

"Αν οἱ προβολές αὐτές πολλαπλασιαστοῦν ἐπύ τόν παράγοντα $e^{-\gamma z}$ δύνουν τίς φασικές συνιστώσες τῶν πεδίων κατά τόν ἄξονα z τῆς διάδοσης. Ἡ σταθερά τῆς διάδοσης εἶναι :

$$\gamma = j\beta \quad (5-108)$$

"Ωστε, γενικά, κι ἐδῶ καταλήγουμε στή λύση τῆς διαφορικῆς ἐξίσωσης :

$$\nabla_T^2 U + k_c^2 U = 0 \quad (5-109)$$

ὅπου

$$k_c^2 = \frac{\omega^2}{U^2} + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{U^2} - \beta^2 \quad (5-110)$$

Στις κυλινδρικές συντεταγμένες είναι :

$$\nabla_T^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \quad (5-111)$$

Ωστε η (5-109) γράφεται:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + k_c^2 U = 0 \quad (5-112)$$

Λύνουμε την (5-112) (βλ. παράρτημα I) και από τις (5-106), (5-107) προσδιορίζουμε την H_z ή την E_z . Οι υπόλοιπες συνιστώσες προσδιορίζονται από αυτές αν χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις :

$$E_\rho = -\frac{1}{k_c^2} \left[\gamma \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{j\omega\mu}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right]$$

$$E_\varphi = \frac{1}{k_c^2} \left[-\frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right]$$

$$H_\rho = \frac{1}{k_c^2} \left[\frac{j\omega\varepsilon}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right]$$

$$H_\varphi = -\frac{1}{k_c^2} \left[j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right]$$

(5-113)

πού είναι η λύση των εξισώσεων του Maxwell στις κυλινδρικές συντεταγμένες και είναι ανάλογες με τις (5-29) των καρτεσιανών συντεταγμένων.

Όπως αναφέρεται στο παράρτημα I η λύση της (5-112) για κάθε τιμή του n είναι :

$$\boxed{U_n = U_0 J_n(k_c \rho) \cos n \varphi} \quad (5-114)$$

Ανατρέχοντας στις (5-106), (5-107) ενσωματώνουμε τη σταθερά U_0 στις H'_0 , E'_0 και έχουμε :

$$H_z = H_0 J_n(k_c \rho) \cos n \varphi \quad (5-115)$$

$$\tilde{H} \quad E_z = E_0 J_n(k_c \rho) \cos n \varphi \quad (5-116)$$

Από τις (5-115) και (5-116) και χρησιμοποιώντας και τις (5-113) προσδιορίζουμε και τις υπόλοιπες συνιστώσες.

Τά αποτελέσματα για τον κάθε κυματικό τύπο (TM) και (TE) φαίνονται στον παρακάτω πίνακα 5-I .

ΠΙΝΑΚΑΣ 5-I

ΚΥΜΑΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ TM	ΚΥΜΑΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ TE
$H_\rho = -j \frac{n \lambda_{op}}{k_c Z \rho \lambda} E_0 J_n(k_c \rho) \sin n \varphi e^{j(\omega t - \beta z)}$	$E_\rho = j \frac{n Z \lambda_{op}}{k_c \rho \lambda} H_0 J_n(k_c \rho) \sin n \varphi e^{j(\omega t - \beta z)}$
$H_\varphi = -j \frac{\lambda_{op}}{\lambda Z} E_0 J'_n(k_c \rho) \cos n \varphi e^{j(\omega t - \beta z)}$	$E_\varphi = j Z \frac{\lambda_{op}}{\lambda} H_0 J'_n(k_c \rho) \cos n \varphi e^{j(\omega t - \beta z)}$
$H_z = 0$	$E_z = 0$
$E_\rho = H_\varphi Z_{TM}$	$H_\rho = -\frac{E_\varphi}{Z_{TE}}$
$E_\varphi = -H_\rho Z_{TM}$	$H_\varphi = \frac{E_\rho}{Z_{TE}}$
$E_z = E_0 J_n(k_c \rho) \cos n \varphi e^{j(\omega t - \beta z)}$	$H_z = H_0 J_n(k_c \rho) \cos n \varphi e^{j(\omega t - \beta z)}$

όπου

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (5-117)$$

ή κυματική αντίσταση του διηλεκτρικού,

$$\gamma = j\beta = j\sqrt{\frac{\omega^2}{u^2} - k_c^2} \quad (5-118)$$

ή σταθερά της διάδοσης,

$$\lambda_k = \frac{2\pi}{\beta} \quad (5-119)$$

τό μήκος κύματος μέσα στον κυματοδηγό,

$$\frac{1}{\lambda_k^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{op}^2} \quad (5-120)$$

λ_{op} τό όρικό μήκος κύματος

$$\lambda_{op} = \frac{2\pi}{k_c} \quad (5-121)$$

καί

$$Z_{TM} = Z \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{op}}\right)^2} \quad (5-122)$$

$$Z_{TE} = \frac{Z}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{op}}\right)^2}} \quad (5-123)$$

ή κυματική αντίσταση του κυματοδηγού στην κάθε περίπτωση.

Θά προσδιορίσουμε τώρα τό k_c στην περίπτωση του κυματικού τύπου TM καί του κυματικού τύπου TE .

5.3.1. Κυματικός τύπος TM.

Γι' αυτόν τον κυματικό τύπο ή όριακή συνθήκη του ηλεκτρικού πεδίου είναι :

$$E_\varphi = 0, E_z = 0 \quad \text{γιά } \rho = a \quad (5-124)$$

όπου a ή ακτίνα του κυλινδρικού κυματοδηγού, ενώ του μαγνητικού πεδίου :

$$H_\rho = 0 \quad \text{γιά } \rho = a \quad (5-125)$$

Εφαρμόζοντας τις συνθήκες (5-124) και (5-125) στις κατάλληλες σχέσεις του πίνακα 5-I οδηγούμαστε στη συνθήκη :

$$J_n(k_c \alpha) = 0$$

Άρα το γινόμενο $k_c \alpha$ πρέπει να είναι ρίζα της $J_n(u)$. Η $J_n(u)$ όμως έχει άπειρο αριθμό ριζών. Έστω p_{nl} η l τάξης ρίζα της $J_n(u)$ τότε το αντίστοιχο k_c είναι :

$$(k_c)_{TMnl} = \frac{p_{nl}}{\alpha} \quad (5-126)$$

Για κάθε ζευγάρι n, l αντιστοιχεί και ένα $(k_c)_{nl}$ και επομένως και ένα όριό μήκος κύματος :

$$\lambda_{TMnl,op} = \frac{2\pi}{(k_c)_{nl}} \quad (5-127)$$

Οι διάφοροι αυτοί κυματικοί τύποι χαρακτηρίζονται ως TM_{nl} (ή E_{nl}). Όστε για τον κυματικό τύπο TM_{nl} είναι :

$$\lambda_{TMnl,op} = \frac{2\pi\alpha}{p_{nl}} \quad (5-128)$$

Η όριή συχνότητα του τύπου αυτού είναι :

$$f_{TMnl,op} = \frac{p_{nl}}{2\pi\alpha \sqrt{\epsilon\mu}} \quad (5-129)$$

Μελετώντας τις σχέσεις του πίνακα 5-I καταλαβαίνουμε τη σημασία των άκεράων n και l . Ο αριθμός n εκφράζει πόσες πλήρεις διακυμάνσεις του πεδίου συμβαίνουν αν ακολουθήσουμε έναν κύκλο (μέ τυχαία ακτίνα) της διατομής του κυματοδηγού, ενώ ο l εκφράζει πόσες πλήρεις διακυμάνσεις του πεδίου συμβαίνουν αν ακολουθήσουμε μία οποιαδήποτε διάμετρο της διατομής του κυματοδηγού.

Μερικές ρίζες της συνάρτησης Bessel $J_n(u)$ καθώς και της πρώτης παραγώγου της $J'_n(u)$ δίνονται στον πίνακα III του Παραρτήματος .

5.3.2. Κυματικός τύπος ΤΕ.

Η οριακή συνθήκη γι' αυτόν τόν κυματικό τύπο είναι, για τό ηλεκτρικό πεδίο :

$$\left[E_{\varphi} \right]_{\rho=a} = 0 \quad (5-130)$$

ένω για τό μαγνητικό πεδίο:

$$\left[H_{\rho} \right]_{\rho=a} = 0 \quad (5-131)$$

Εφαρμόζοντας τίς (5-130) , (5-131) στίς κατάλληλες σχέσεις του πίνακα 5-I οδηγούμαστε στή συνθήκη:

$$J_n'(k_c a) = 0$$

Όστε τό γινόμενο $k_c a$ πρέπει νά είναι ρίζα τής παραγώγου τής συνάρτησης Bessel πρώτου είδους ($J_n'(u)$). Στόν πίνακα IIII του Παραρτήματος . Περιλαμβάνονται μερικές ρίζες τής $J_n'(u)$, από τόν άπειρο άριθμό ριζών πού διαθέτει. Έστω p_{nl}' ή 1-τάξης ρίζα τής $J_n'(u)$. Τότε τό αντίστοιχο k_c είναι :

$$(k_c)_{TE_{nl}} = \frac{p_{nl}'}{a} \quad (5-132)$$

Γιά κάθε ζευγάρι, λοιπόν, άκεραίων n, l αντιστοιχεῖ κι ένας έγkάρσιος ηλεκτρικός κυματικός τύπος $TE_{nl}(H_{nl})$ μέ όρικό μήκος κύματος :

$$\lambda_{TE_{nl}, op} = \frac{2\pi}{(k_c)_{nl}} = \frac{2\pi a}{p_{nl}'} \quad (5-133)$$

οί άριθμοί n καί l έχουν τήν ἴδια φυσική σημασία πού αναφέραμε στό a προηγουμένως.

Η όριση συχνότητα του τύπου αυτού είναι:

$$f_{TE_{nl},or} = \frac{p'_{nl}}{2\pi a \sqrt{\epsilon\mu}} \quad (5-134)$$

Στόν πίνακα 5-II δίνονται οι πεδιακές κατανομές και όρισμένα βασικά στοιχεία μερικών κυματικών τύπων του κυκλικού κυματοδηγού.

5.3.3. Ξεασθένση του κύματος κατά τή διάδοση μέσα από κυκλικό κυλινδρικό κυματοδηγό.

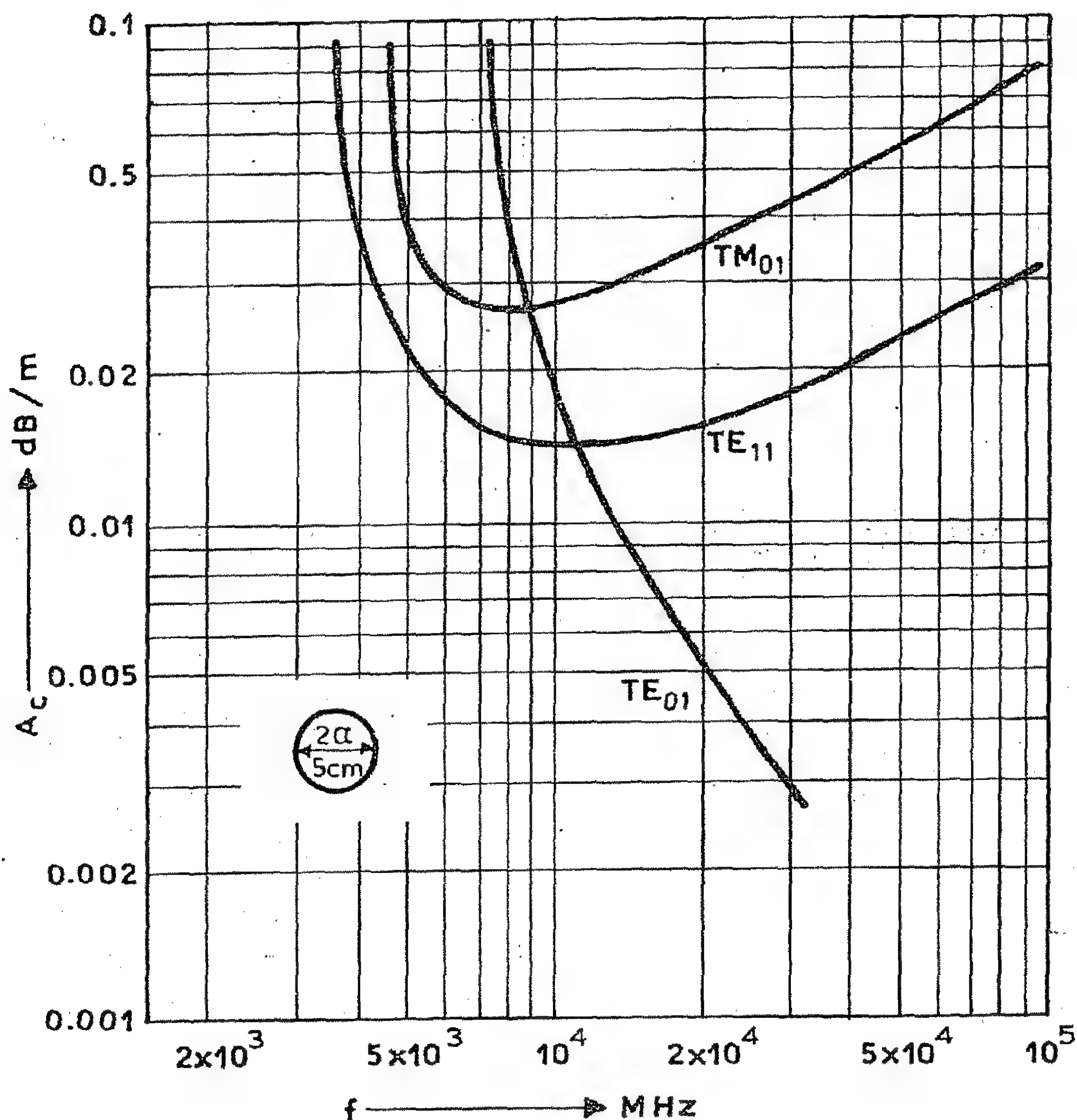
Όπως στόν όρθογώνιο κυματοδηγό έτσι και στόν κυκλικό ή ξεασθένση κατά τή διάδοση όφείλεται στήν πεπερασμένη τιμή τής ειδικής άγωγιμότητας του μετάλλου των τοιχωμάτων και στήν κακή ποιότητα του διηλεκτρικού (μή τέλειο διηλεκτρικό). Ο συντελεστής ξεασθένσης α_d , πού όφείλεται στό δεύτερο παράγοντα, δίνεται κι' έδω από τή σχέση (5-103) :

$$\alpha_d = \frac{\sigma_d Z_d}{2\sqrt{1 - \left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}} \quad (5-103)$$

πού είναι κοινή για όλους τους κυματοδηγούς και όλους τους κυματικούς τύπους. Ο συντελεστής ξεασθένσης α_c πού όφείλεται στήν πεπερασμένη άγωγιμότητα των τοιχωμάτων είναι για τους τύπους TM_{nl} και TE_{nl} , αντίστοιχα :

$$\alpha_{TM_{nl}} = \frac{R_s}{\alpha Z_d \sqrt{1 - \left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}} \quad (5-135)$$

$$\alpha_{TE_{nl}} = \frac{R_s}{\alpha Z_d \sqrt{1 - \left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}} \left[\left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2 + \frac{n^2}{p'^2_{nl} - n^2} \right] \quad (5-136)$$



Σχ. 5-7 Διάγραμμα της εξασθένισης ανά μονάδα μήκους A_c (dB/m) τριών κυματικών τύπων ενός κενού χάλκινου κυκλικού κυματοδηγού με διάμετρο 5 cm .

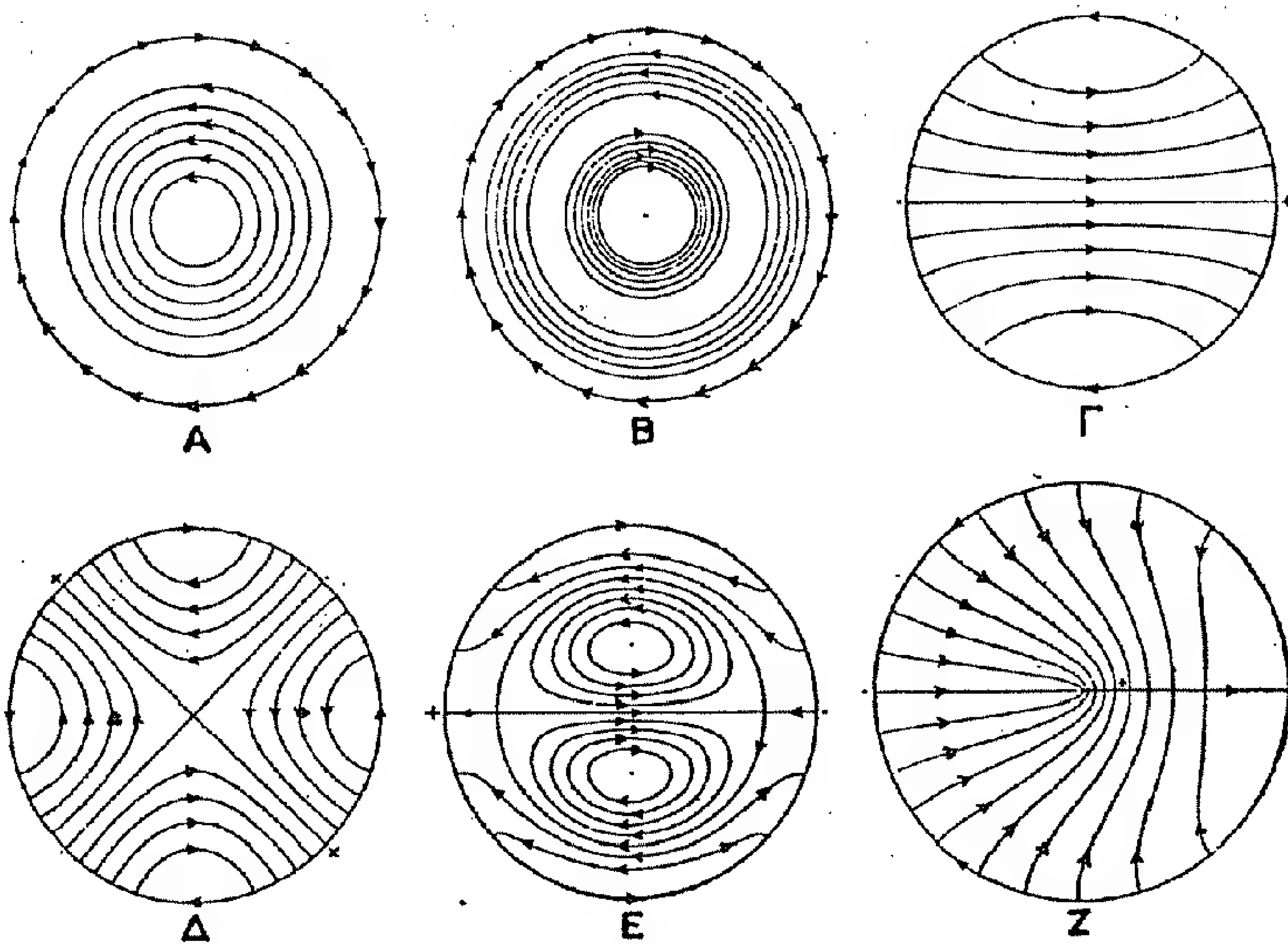
Στό σχήμα 5-7 δίνουμε τό διάγραμμα της εξασθένισης ανά μονάδα μήκους (A_c) σέ συνάρτηση μέ τή συχνότητα (f) γιά τούς τρεῖς πρώτους κυματικούς τύπους ενός κενού χάλκινου κυκλικού κύματο - δηγού μέ διάμετρο 5 cm .

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ TE_{01} , πάνω ἀπό 11 GHz (περίπου), ἐμφανί - ζει τή μικρότερη ἐξασθένιση, πού μάλιστα μικραίνει ὅσο μεγαλώ - νει ἡ συχνότητα. Αὐτός εἶναι ὁ λόγος, πού ὁ κυματικός αὐτός τύ - πος χρησιμοποιεῖται συχνά στήν πράξη.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5-Π

Πεδιακή Κατανομή και Βασικά Στοιχεία
μερικῶν Κυματικῶν Τύπων τοῦ Κυκλικοῦ Κυματοδηγοῦ

TM_{01}	TM_{02}	TM_{11}	TE_{01}	TE_{11}
$E_z, E_r, H_\phi \neq 0$	$E_z, E_r, H_\phi \neq 0$	$E_z, E_r, E_\phi, H_r, H_\phi \neq 0$	$H_z, H_r, E_\phi \neq 0$	$H_z, H_r, H_\phi, E_r, E_\phi \neq 0$
$p_{01} = 2,405$	$p_{02} = 5,52$	$p_{11} = 3,83$	$p'_{01} = 3,83$	$p'_{11} = 1,84$
$k_c = \frac{2,405}{a}$	$k_c = \frac{5,52}{a}$	$k_c = \frac{3,83}{a}$	$k_c = \frac{3,83}{a}$	$k_c = \frac{1,84}{a}$
$\lambda_{op} = 2,61a$	$\lambda_{op} = 1,14a$	$\lambda_{op} = 1,64a$	$\lambda_{op} = 1,64a$	$\lambda_{op} = 3,41a$
$f_{op} = \frac{0,383}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$	$f_{op} = \frac{0,877}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$	$f_{op} = \frac{0,609}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$	$f_{op} = \frac{0,609}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$	$f_{op} = \frac{0,293}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$



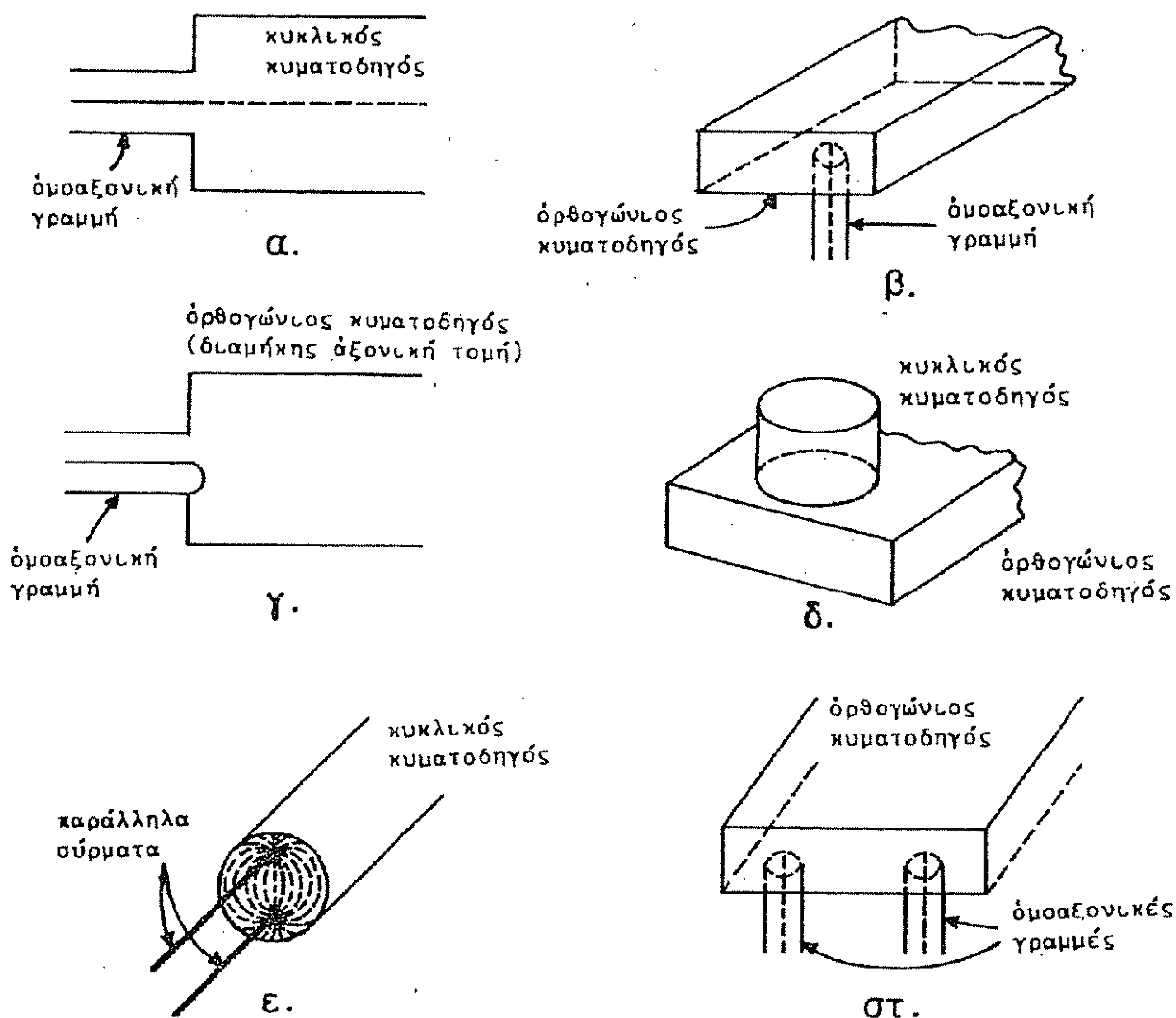
Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου σε όρισμένους κυματικούς τύπους TE κυκλικού κυματοδηγού. Η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών δείχνει το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου.

Α:	κυματικός τύπος	TE_{01}
Β:	"	" TE_{02}
Γ:	"	" TE_{11}
Δ:	"	" TE_{21}
Ε:	"	" TE_{12}
Ζ:	"	" $TE_{1/2,1}$

Επισημαίνεται ότι η περίπτωση Ζ αντιστοιχεί στον " κλασματικό " κυματικό τύπο $TE_{1/2,1}$

5.4. Τρόποι Διέγερσης και Λήψης του Σήματος στους Κυματοδηγούς.

Στό παρακάτω σχήμα δύνονται μερικοί τρόποι "διέγερσης" του κυματοδηγού, εισαγωγής δηλαδή του σήματος, που θέλουμε να κυματοδηγηθεῖ. Οι ἔδωτοι τρόποι ισχύουν αντίστροφα γιὰ τή λήψη τοῦ σήματος στό τέρμα τοῦ κυματοδηγού.



Σχ. 5-8

- α. Διέγερση τοῦ τύπου TM_{01} σέ κύκλικό κυματοδηγό
 β. " " " TE_{10} σέ ὀρθογώνιο "
 γ. " " " TE_{10} σέ " "
 δ. Σύζευξη κυκλικοῦ (TM_{01}) καί ὀρθογώνιου (TE_{10}) κυματοδηγού.
 ε. Διέγερση τοῦ τύπου TM_{11} σέ κύκλικό κυματοδηγό
 στ. " " " TE_{20} σέ ὀρθογώνιο "

5.5. Ήλεκτρομαγνητικά Άντηχεία.

Τά ήλεκτρομαγνητικά άντηχεία (resonant cavities ή cavity resonators) είναι επέκταση τών συντονιζόμενων κυκλωμάτων $L - C$ στύς πολύ ύψηλές ήλεκτρομαγνητικές συχνότητες καί είναι κλειστές κοιλότητες μέ άγώγιμα τοιχώματα.

Τά συνηθισμένα συντονιζόμενα κυκλώματα, μέ έντοπισμένες σταθερές L καί C , είναι άκατάλληλα γιά τύς πολύ ύψηλές συχνότητες (π.χ. γιά μήκη κύματος $\lambda < 1m$) έπειδή έχουν μεγάλες άπώλειες γιατί άκτινοβολοϋν ένέργεια στό γύρω χώρο καί γιατί ή άντιστάσή τους, λόγω τοϋ έπιδερμικοϋ φαινομένου, είναι πολύ μεγάλη, παράγοντες ποϋ όδηγοϋν στή μείωση τοϋ συντελεστή ποιότητας Q .

Μέ κατάλληλη διέγερση, μέσα στά ήλεκτρομαγνητικά άντηχεία αναπτύσσονται σ τ ά σ ι μ ο ι ^{*}) κυματικ ο ύ τύποι (resonant modes), ποϋ είναι άνάλογοι μέ τά στάσιμα ήχητικά κύματα στά άκουστικά άντηχεία.

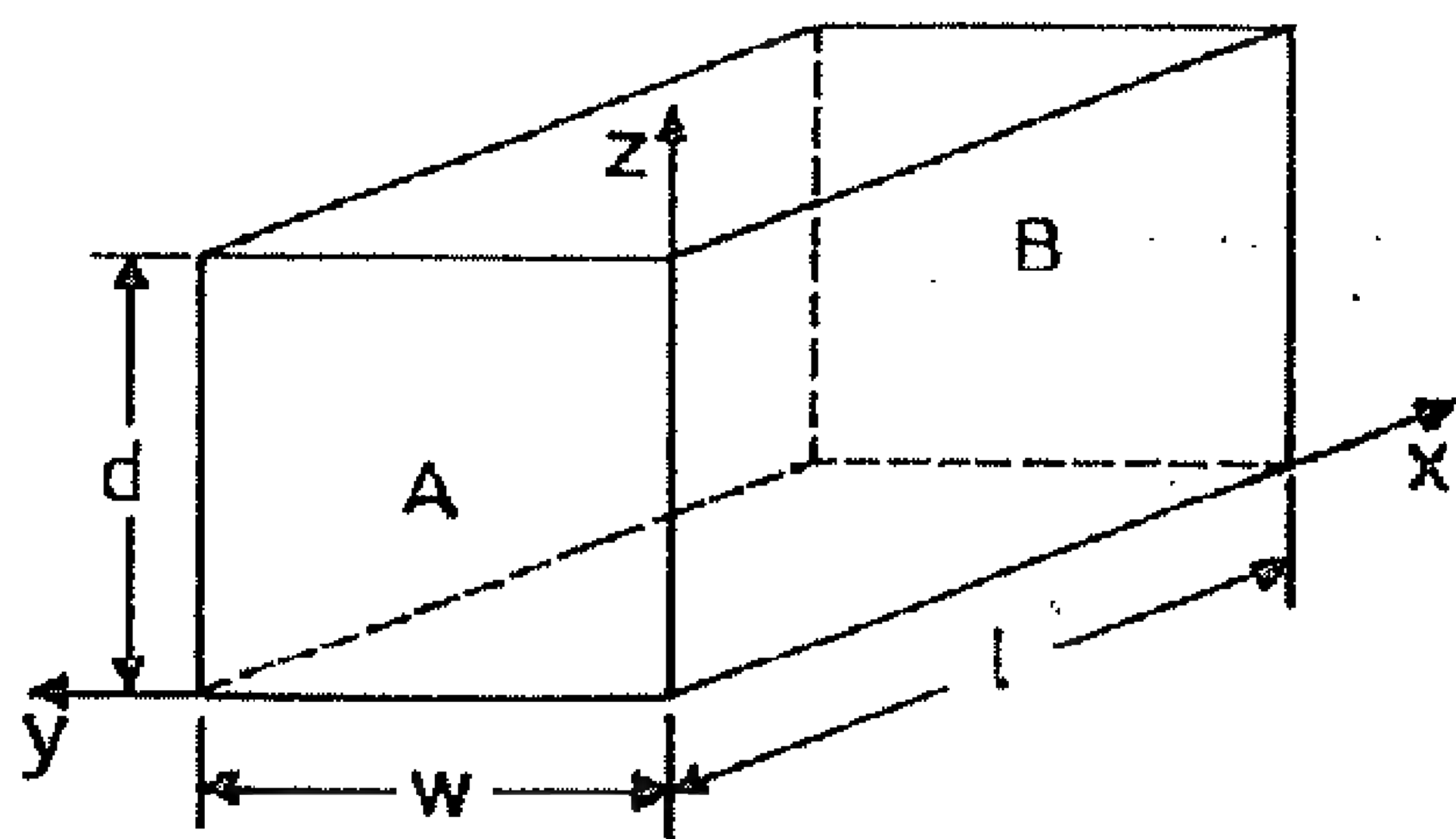
Παρακάτω θά μελετήσουμε τύς πεδιακές κατανομές τών στάσιμων κυματικών τύπων μέσα στό όρθογώνιο ήλεκτρομαγνητικό άντηχείο καί στό κυκλικό κυλινδρικό άντηχείο.

5.5.1. Τό όρθογώνιο ήλεκτρομαγνητικό άντηχείο.

Θά μελετήσουμε τό όρθογώνιο ήλεκτρομαγνητικό άντηχείο σάν ένα κομμάτι όρθογώνιου κυματοδηγοϋ μέ μήκος l , ποϋ τό κλείνουμε στύς δύο του άκρες μέ έπίπεδες άγώγιμες έδρες (βλ. σχ. 5-9)

Άς φανταστοϋμε, τώρα, έναν κυματικό τύπο (TE ή TM), ποϋ δημιουργήθηκε μέ κάποιο τρόπο καί διαδύδεται κατά τή διεύθυνση $+x$

^{*}) Σέ άντίθεση μέ τούς τ ρ έ χ ο ν τ ε ς κυματικούς τύπους, μέσα στοϋς κυματοδηγοϋς.



Σκ. 5-9 Τό ορθογώνιο ηλεκτρομαγνητικό αντηχεύο είναι ένα κομμάτι από ορθογώνιο κυματοδηγό κλεισμένο στις δύο του άκρες με δύο επίπεδες αγώγιμες έδρες Α και Β.

μέσα στο αντηχεύο. Τό κύμα αυτό, όταν φτάσει στην έδρα Β, θά υποστεί ανάκλαση. Τό προσπίπτον κύμα και τό ανακλώμενο συμβάλλουν και αν τό μήκος l του αντηχεύου βρίσκεται σε όρισμένη σχέση με τό μήκος κύματος λ_k , δημιουργούν στάσιμα κύματα.

Στάσιμος κυματικός τύπος TE_{mnp}

Ας υποθέσουμε ότι τό αρχικό τρέχον κύμα είναι τοῦ τύπου TE_{mn} δηλαδή περιγράφεται από τις σχέσεις (5-57) ή τις (5-69).

Ωστε, μέσα στο ορθογώνιο αντηχεύο κάθε πεδιακή συνιστώσα θά είναι ίση με τό άθροισμα μιᾶς συνιστώσας, πού τρέχει πρὸς τό $+x$ και μιᾶς άλλης, πού τρέχει πρὸς τό $-x$.

Από τήν πρώτη των (5-57), προκύπτει ότι ή συνιστώσα H_x τοῦ συνολικοῦ πεδίου θά είναι :

$$H_x = H_{xi} + H_{xr} \quad (5-137)$$

ὅπου H_{xi} και H_{xr} τό προσπίπτον και τό ανακλώμενο κύμα, αντίστοιχα, και είναι :

$$H_{xi} = H_{oi} \cos k_y y \cos k_z z e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (5-138)$$

$$H_{xr} = H_{or} \cos k_y y \cos k_z z e^{j(\omega t + \beta x)} \quad (5-139)$$

και k_y και k_z τά γνωστά μεγέθη. Ωστε :

$$H_x = (H_{oi} e^{-j\beta x} + H_{or} e^{j\beta x}) \cos k_y y \cos k_z z e^{j\omega t} \quad (5-140)$$

Εφαρμόζοντας την όριακή συνθήκη $H_x=0$ στις έδρες A και B, έχουμε:

$$H_x = H_0 \cos k_y y \cos k_z z \sin k_x x e^{j\omega t} \quad (5-141)$$

όπου η H_0 είναι μία μιγαδική, εν γένει, σταθερά και

$$k_x \equiv \beta = \frac{p\pi}{l}, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (5-142)$$

Η (5-141) περιγράφει ένα στάσιμο κύμα, δηλ. μία αρμονική ταλάντωση, με χωρική κατανομή πλάτους, που εξαρτάται από τα k_y , k_z και k_x δηλ. από την τριάδα των άκεραίων (m, n, p) .

Με παρόμοια εργασία προσδιορίζουμε και τις άλλες συνιστώσες, που μαζί με την H_x περιγράφουν έντελως το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μέσα στο άντηχετο, το οποίο στην περίπτωση αυτή λέγεται **έ γ κ ά ρ σ ι ο ς ή λ ε κ τ ρ ι κ ό ς σ τ ά σ ι μ ο ς κ υ μ α τ ι κ ό ς τ ύ π ο ς** (TE_{mnp}). Όλες οι συνιστώσες του τύπου αυτού είναι :

$$\left. \begin{aligned} H_x &= H_0 \cos k_y y \cos k_z z \sin k_x x e^{j\omega t} \\ H_y &= -\frac{k_x k_y}{k_c^2} H_0 \sin k_y y \cos k_z z \cos k_x x e^{j\omega t} \\ H_z &= -\frac{k_x k_z}{k_c^2} H_0 \cos k_y y \sin k_z z \cos k_x x e^{j\omega t} \\ E_x &= 0 \\ E_y &= \frac{j\omega\mu k_z}{k_c^2} H_0 \cos k_y y \sin k_z z \sin k_x x e^{j\omega t} \\ E_z &= -\frac{j\omega\mu k_y}{k_c^2} H_0 \sin k_y y \cos k_z z \sin k_x x e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (5-143)$$

όπου

$$k_y = \frac{m\pi}{w}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5-144)$$

$$k_z = \frac{n\pi}{d}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5-145)$$

$$k_x = \frac{p\pi}{l}, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (5-146)$$

$$k_c^2 = k_y^2 + k_z^2 \quad (5-147)$$

και

$$\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = k_y^2 + k_z^2 + k_x^2 \quad (5-148)$$

Στάσιμος κυματικός τύπος TM_{mnp}

Μέ παρόμοιο τρόπο, συνθέτοντας δύο τρέχοντα κύματα τύπου TM_{mn} , μπορούμε να προσδιορίσουμε τις συνιστώσες του \vec{E} και \vec{H} του μαγνητικού κυματικού τύπου (TM_{mnp}). Οι συνιστώσες αυτές είναι :

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_0 \sin k_y y \sin k_z z \cos k_x x e^{j\omega t} \\ E_y &= -\frac{k_x k_y}{k_c^2} E_0 \cos k_y y \sin k_z z \sin k_x x e^{j\omega t} \\ E_z &= -\frac{k_x k_z}{k_c^2} E_0 \sin k_y y \cos k_z z \sin k_x x e^{j\omega t} \\ H_x &= 0 \\ H_y &= \frac{j\omega \epsilon k_z}{k_c^2} E_0 \sin k_y y \cos k_z z \cos k_x x e^{j\omega t} \\ H_z &= -\frac{j\omega \epsilon k_y}{k_c^2} E_0 \cos k_y y \sin k_z z \cos k_x x e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (5-149)$$

όπου τά k_x , k_y , k_z καί k_c είναι τά μεγέθη τών σχέσεων (5-144) έως (5-148) .

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς

• Όπως είναι γνωστό, αν λ_k είναι τό μήκος τοῦ τρέχοντος κύματος μέσα στόν κυματοδηγό ισχύει ἡ σχέση :

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_k} \quad \text{ἢ} \quad k_x = \frac{2\pi}{\lambda_k} \quad (5-150)$$

Ὡστε, ἐξαιτίας καί τῆς (5-146), είναι:

$$\frac{2\pi}{\lambda_k} = \frac{p\pi}{l}$$

ἢ

$$l = p \frac{\lambda_k}{2}$$

(5-151)

Ἡ σχέση αὐτή, ὅπως βλέπουμε, είναι ἴδια μέ τή συνθήκη στάσιμων κυμάτων σέ κλειστό ἡχητικό σωλήνα.

• Οἱ σχέσεις (5-143) καί (5-149) περιγράφουν στάσιμα ἠλεκτρομαγνητικά κύματα . Ἡ κυκλική τους συχνότητα ω καθορίζεται ἀπό τήν ἐξίσωση (5-148) πού γράφεται :

$$\frac{\omega^2}{v^2} = \left(\frac{m\pi}{w}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 \quad (5-152)$$

δηλαδή ἀπό τίς διαστάσεις τοῦ ὀρθογώνιου ἀντηχείου καί ἀπό τοὺς ἀκεραίους m, n, p , πού καθορίζουν τήν τάξη τοῦ στάσιμου κυματικοῦ τύπου. Οἱ κυματικοί τύποι μέ μεγαλύτερη τάξη ἔχουν καί μεγαλύτερες συχνότητες συντονισμοῦ. Ἡ (5-152) ὁδηγεῖ στό μήκος κύματος συντονισμοῦ ἢ στή συχνότητα συντονισμοῦ:

$$\frac{1}{\lambda_{mnp}} = \sqrt{\left(\frac{m}{2w}\right)^2 + \left(\frac{n}{2d}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}$$

$$f_{mnp} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\left(\frac{m\pi}{w}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}{\epsilon\mu}} \quad (5-153)$$

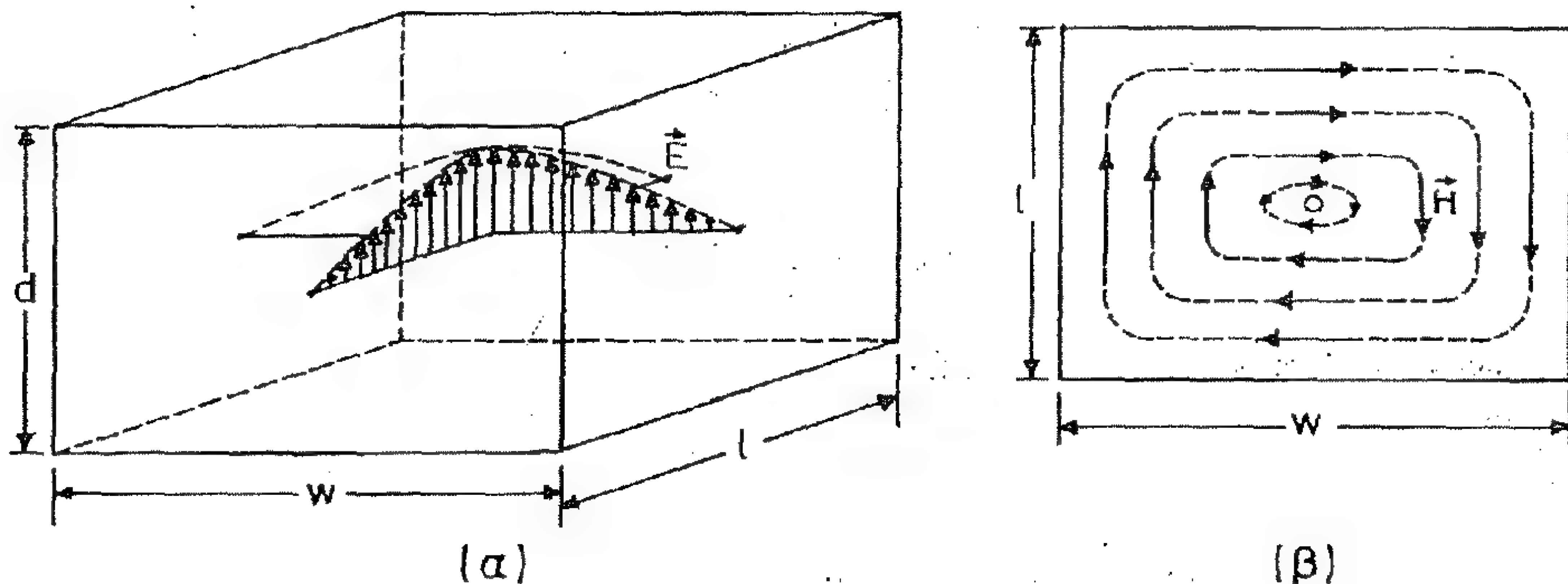
• Οἱ κυματικοὶ τύποι TE_{mnp} καὶ TM_{mnp} , μέ τις ἴδιες τιμές ἀκεραίων m, n καὶ p , παρόλο πού ἔχουν διαφορετικές πεδιακές κατανομές ἔχουν τις ἴδιες συχνότητες συντονισμοῦ. Τέτοιοι κυματικοὶ τύποι, λέγονται ἐκφυλισμένοι τύποι (degenerate modes). Ἐκφυλισμός συμβαίνει καὶ μέσα στήν ἴδια κατηγορία, λόγου χάρι τήν TE , ὅταν δύο ἢ καὶ ὅλες οἱ διαστάσεις τοῦ ἀντηχείου εἶναι ἴσες.

Ὁ στάσιμος κυματικός τύπος TE_{101} σέ ὀρθογώνιο ἀντηχεῖο

Ὁ τύπος αὐτός, εἶναι ὁ ἀπλούστερος στάσιμος κυματικός τύπος τοῦ ὀρθογώνιου ἀντηχείου καὶ περιγράφεται ἀπό τις παρακάτω ἐξισώσεις, πού εἶναι μερική περίπτωση τῶν (5-143) γιά $m=1$, $n=0$ καὶ $p=1$:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= H_0 \cos \frac{\pi y}{w} \sin \frac{\pi x}{l} e^{j\omega t} \\ H_y &= -\frac{w}{l} H_0 \sin \frac{\pi y}{w} \cos \frac{\pi x}{l} e^{j\omega t} \\ H_z &= 0 \\ E_x &= E_y = 0 \\ E_z &= -\frac{j\omega\mu w H_0}{\pi} \sin \frac{\pi y}{w} \sin \frac{\pi x}{l} e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (5-154)$$

Στό σχ. 5-10 φαίνονται δύο παραστατικές όψεις της πεδιακής κατανόμης του στάσιμου κυματικού τύπου TE_{101} μέσα στο όρθογώνιο ηλεκτρομαγνητικό άντηχεῖο.



Σχ. 5-10 Τό ηλεκτρικό (α) καὶ τό μαγνητικό (β) πεδίο τοῦ στάσιμου κυματικοῦ τύπου TE_{101} στό ὀρθογώνιο ηλεκτρομαγνητικό άντηχεῖο.

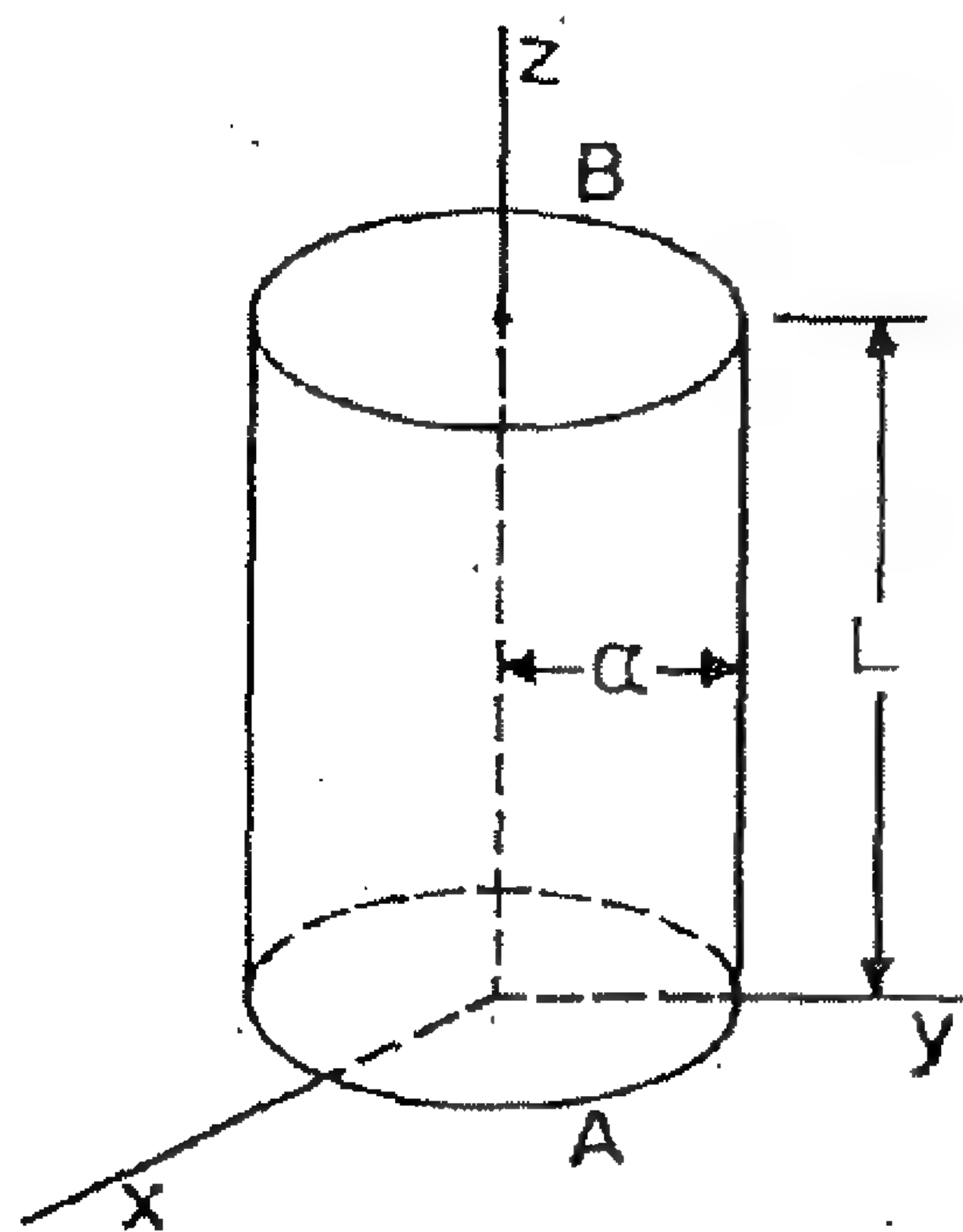
5.5.2. Τό κυκλικό κυλινδρικό ηλεκτρομαγνητικό άντηχεῖο.

Θά μελετήσουμε καὶ τό κυκλικό κυλινδρικό ηλεκτρομαγνητικό άντηχεῖο, σάν ἓνα κομμάτι ἀπό κυκλικό κυλινδρικό κυματοδηγό, πού τό ἔχουμε σφραγίσει στίς δύο τοῦ ἄκρες μέ ἐπίπεδες ἀγωγίμες βάσεις (βλ.σχ. 5-11) .

Στάσιμος κυματικός τύπος TE_{n1}

Ἄς φανταστοῦμε μέσα στό άντηχεῖο ἓνα τρέχον κύμα τοῦ τύπου TE_{n1} ,

ἓνα κύμα δηλαδή, πού περιγράφεται ἀπό τίς ἐξισώσεις τῆς δεξιάς στήλης τοῦ πύνακα 5-1 .



Σχ. 5-11 Τό κυκλικό κυλινδρικό ηλεκτρομαγνητικό άντηχεῖο εἶναι ἓνα κομμάτι ἀπό κυκλικό κυλινδρικό κυματοδηγό κλεισμένο στίς δύο τοῦ ἄκρες μέ δύο ἐπίπεδες ἀγωγίμες ἐδρες Α καὶ Β.

Τό ανακλώμενο στη βάση Β κύμα συμβάλλει με τό άρχικό καί σχηματίζει στάσιμο κύμα. Έτσι για τή συνιστώσα H_z θα έχουμε:

$$H_z = H_{zi} + H_{zr} \quad (5-155)$$

όπου

$$H_{zi} = H_{oi} J_n(k_c \rho) \cos n\varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (5-156)$$

$$H_{zr} = H_{or} J_n(k_c \rho) \cos n\varphi e^{j(\omega t + \beta z)} \quad (5-157)$$

τό προσπίπτον καί τό ανακλώμενο κύμα, αντίστοιχα.

Άστε :

$$H_z = (H_{oi} e^{-j\beta z} + H_{or} e^{j\beta z}) J_n(k_c \rho) \cos n\varphi e^{j\omega t} \quad (5-158)$$

Εφαρμόζοντας στην (5-158) τήν όριακή συνθήκη $H_z = 0$ πάνω στις έδρες Α καί Β καταλήγουμε στη σχέση :

$$H_z = H_o J_n(k_c \rho) \cos n\varphi \sin k_z z e^{j\omega t} \quad (5-159)$$

όπου ή H_o είναι μία μιγαδική, έν γένει, σταθερά καί

$$k_z \equiv \beta = \frac{q\pi}{L}, \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (5-160)$$

Μεί παρόμοια έργασία προσδιορίζονται καί οι υπόλοιπες συνιστώσες τοῦ στάσιμου κυματικού τύπου TE_{n1q} . Όλες οι συνιστώσες τοῦ τύπου αὐτοῦ είναι:

$$\left. \begin{aligned} H_\rho &= \frac{-j k_z H_o}{k_c} J_n'(k_c \rho) \cos n\varphi \sin k_z z e^{j\omega t} \\ H_\varphi &= -\frac{n k_z}{k_c^2 \rho} H_o J_n(k_c \rho) \sin n\varphi \cos k_z z e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (5-161)$$

$$\left. \begin{aligned}
 H_z &= H_0 J_n(k_c \rho) \cos n\varphi \sin k_z z e^{j\omega t} \\
 E_\rho &= \frac{j\omega\mu n}{k_c^2 \rho} H_0 J_n(k_c \rho) \sin n\varphi \sin k_z z e^{j\omega t} \\
 E_\varphi &= \frac{j\omega\mu}{k_c} H_0 J_n'(k_c \rho) \cos n\varphi \sin k_z z e^{j\omega t} \\
 E_z &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (5-161)$$

όπου $k_c = \frac{p'_{nl}}{\alpha}$, p'_{nl} ή 1 τάξης ρίζα της $J'_n(u)$ (5-162)

$$k_z = \frac{q\pi}{L}, \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (5-163)$$

καί

$$\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = k_c^2 + k_z^2 \quad (5-164)$$

Οι σχέσεις (5-161) περιγράφουν στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, πού ή κυκλική τους συχνότητα ω καθορίζεται από την (5-164) δηλ. από τις διαστάσεις του άντηχείου καί από τούς άκεραίους n , l , καί q , πού καθορίζουν την τάξη του στάσιμου κυματικού τύπου. Η (5-164) οδηγεί στό μήκος κύματος συντονισμού καί ή συχνότητα συντονισμού :

$$\frac{1}{\lambda'_{nlq}} = \sqrt{\left(\frac{p'_{nl}}{2\pi\alpha}\right)^2 + \left(\frac{q}{2L}\right)^2} \quad \eta \quad f'_{nlq} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\left(\frac{p'_{nl}}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2}{\epsilon\mu}} \quad (5-165)$$

Στάσιμος κυματικός τύπος TM_{nlq}

Μέ παρόμοιο τρόπο, συνθέτοντας δύο τρέχοντα κύματα του τύπου TM_{nl} , μπορούμε νά προσδιορίσουμε τις συνιστώσες του στάσιμου κυματικού τύπου TM_{nlq} . Οι συνιστώσες αυτές είναι :

$$\left. \begin{aligned}
 E_\rho &= -\frac{k_z}{k_c} E_0 J_n'(k_c \rho) \cos n\varphi \sin k_z z e^{j\omega t} \\
 E_\varphi &= \frac{nk_z}{k_c^2 \rho} E_0 J_n(k_c \rho) \sin n\varphi \sin k_z z e^{j\omega t} \\
 E_z &= E_0 J_n(k_c \rho) \cos n\varphi \cos k_z z e^{j\omega t} \\
 \mathcal{H}_\rho &= -\frac{j\omega \epsilon n}{k_c^2 \rho} E_0 J_n(k_c \rho) \sin n\varphi \cos k_z z e^{j\omega t} \\
 \mathcal{H}_\varphi &= -\frac{j\omega \epsilon}{k_c} E_0 J_n'(k_c \rho) \cos n\varphi \cos k_z z e^{j\omega t} \\
 \mathcal{H}_z &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (5-166)$$

$$\text{όπου} \quad k_c = \frac{p_{nl}}{\alpha}, \quad p_{nl} \text{ ή } l \text{ τάξης ρίζα της } J_n(u) \quad (5-167)$$

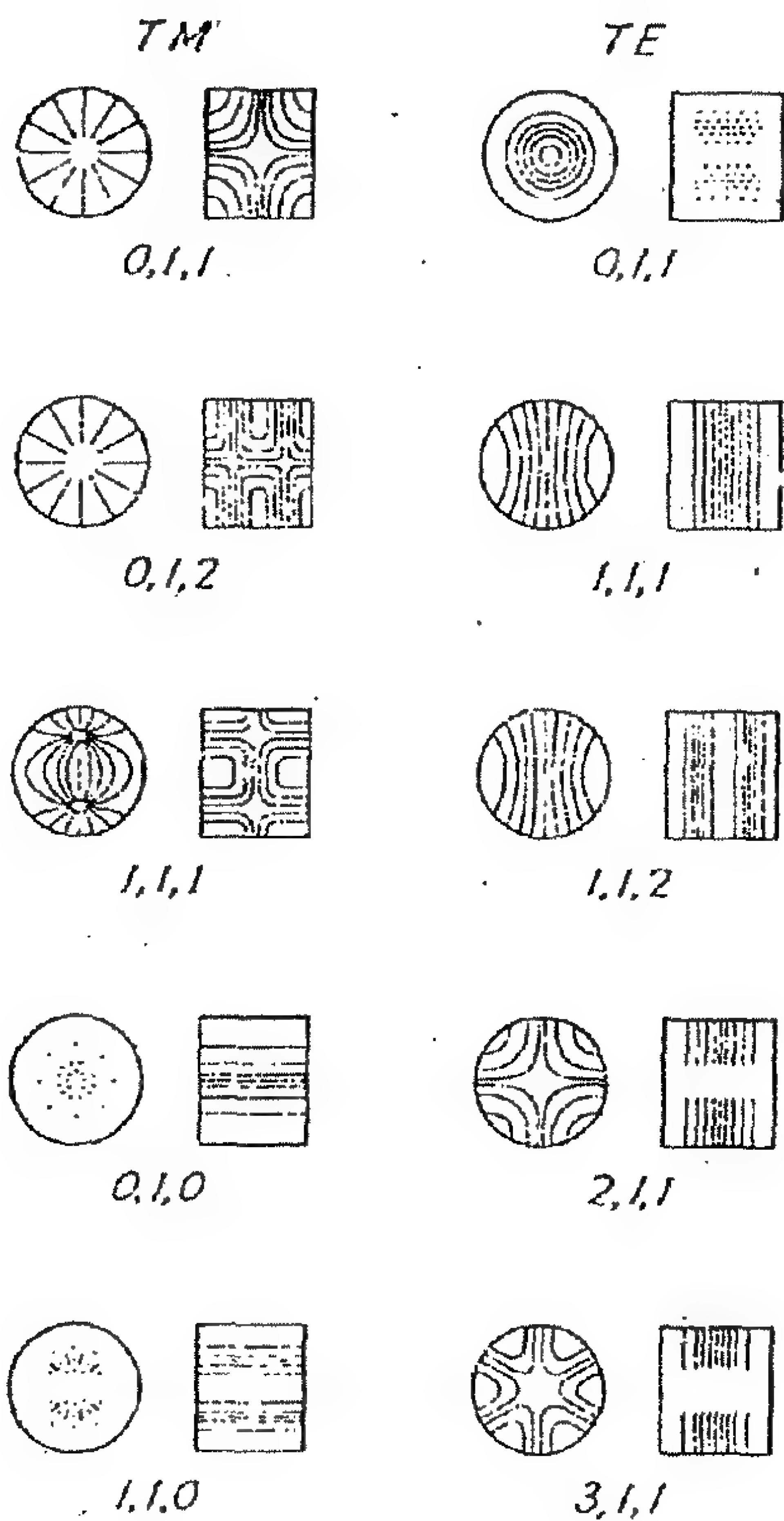
$$k_z = \frac{q\pi}{L}, \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (5-168)$$

$$\text{καί} \quad \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = k_c^2 + k_z^2 \quad (5-169)$$

Οι σχέσεις (5-166) περιγράφουν στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, πού η κυκλική τους συχνότητα ω καθορίζεται από την (5-169) δηλ. από τις διαστάσεις του άντηχέου και από την τριάδα των άκεραίων (n, l, q) πού καθορίζουν την τάξη του στάσιμου κυματικού τύπου. Η (5-169) οδηγεί στο μήκος κύματος συντονισμού και στη συχνότητα συντονισμού :

$$\frac{1}{\lambda_{nlq}} = \sqrt{\left(\frac{p_{nl}}{2\pi\alpha}\right)^2 + \left(\frac{q}{2L}\right)^2} \quad \text{ή} \quad f_{nlq} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\left(\frac{p_{nl}}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2}{\epsilon\mu}} \quad (5-170)$$

Στό σχ. 5-12 φαίνεται ή κατανομή τοῦ ήλεκτρικοῦ πεδίου γιά όρισμένους κυματικούς τύπους TM_{n1q} καί TE_{n1q} τοῦ κυλινδρικοῦ ἀντηχεῖου.

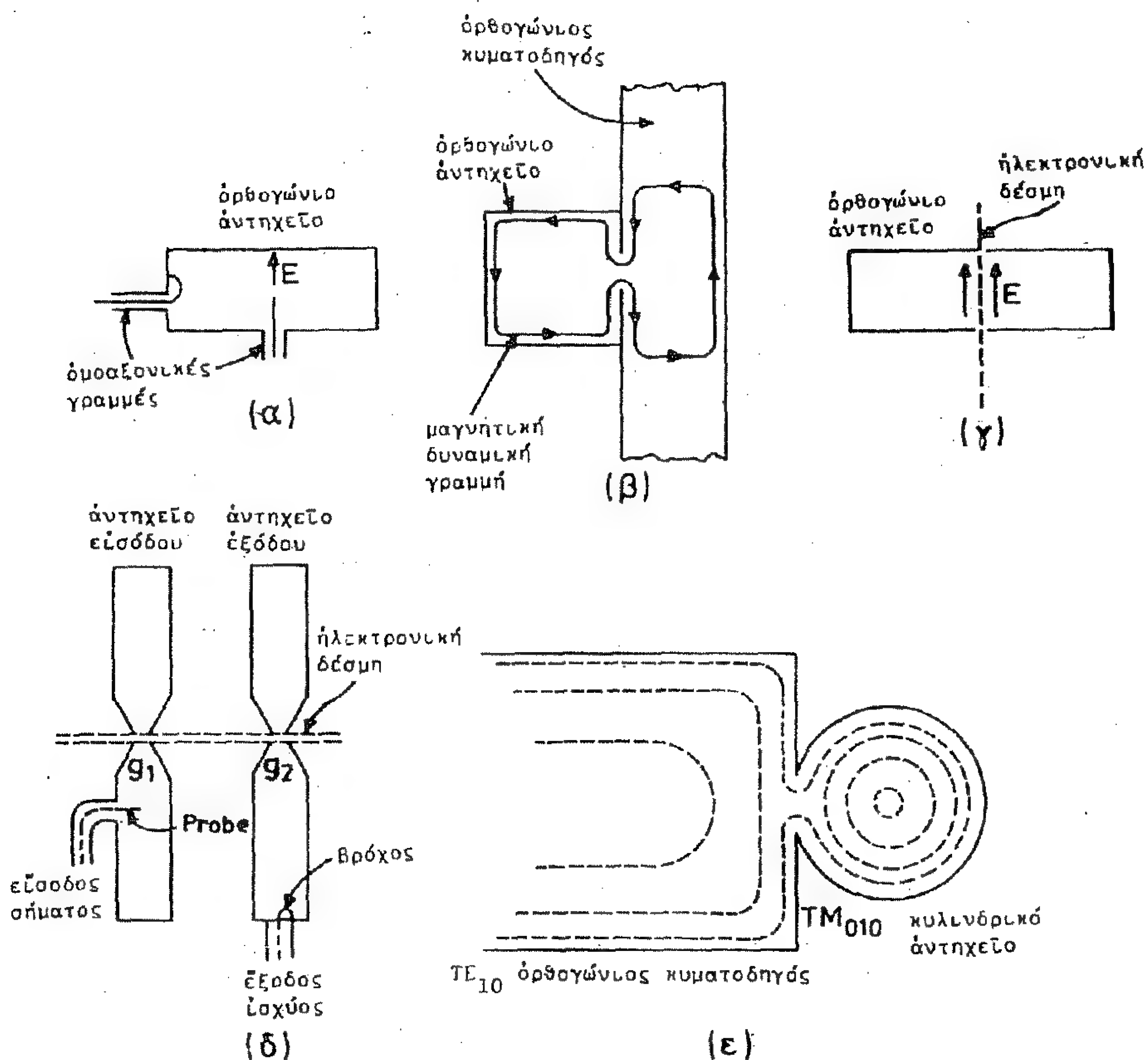


Σχ. 5-12 Κατανομή τοῦ ήλεκτρικοῦ πεδίου γιά όρισμένους κυματικούς τύπους TM_{n1q} καί TE_{n1q} σέ ένα κυλινδρικό ήλεκτρομαγνητικό ἀντηχεῖο .

5.5.3. Σύζευξη άντηχείου με γραμμή μεταφοράς.

Ένα σοβαρό πρακτικό πρόβλημα είναι η προσφορά ή η άπαγωγή ενέργειας από ένα ηλεκτρομαγνητικό άντηχεύο.

Στό σχ. 5-13 φαίνονται μερικοί τρόποι συζεύξεως όρθογώνιων καύ κυλινδρικών άντηχείων με όμοαξονική γραμμή, με κυματοδηγό καύ με ηλεκτρονική δέσμη.



Σχ. 5-13 Τυπικές περιπτώσεις συζεύξεως άντηχείου με όμοαξονική γραμμή, με κυματοδηγό καύ με ήλεκτρονική δέσμη.

Ειδικότερα φαίνεται η σύζευξη όρθογώνιου ήλεκτρομαγνητικού άντηχείου με όμοαξονική γραμμή (σχ. 5-13α), με όρθογώνιο κυλινδρικό άντηχεύο με όμοαξονική γραμμή (σχ. 5-13β), με ήλεκτρονική δέσμη (σχ. 5-13γ), με ηλεκτρονική δέσμη (σχ. 5-13δ), με ήλεκτρονική δέσμη (σχ. 5-13ε).

τοδηγό (σχ. 5-13β) και με ηλεκτρονική δέσμη (σχ. 5-13γ).

Στό σχ. 5-13δ φαίνεται, εξάλλου, η σύζευξη των αντηχείων ενισχύ-
τριας λυχνίας Klystron με την ηλεκτρονική δέσμη και με τις όμο-
αξονικές γραμμές εισόδου και εξόδου.

Τέλος στό σχ. 5-13ε υποδειχνεται ο τρόπος προσαρμογής του
τύπου TE_{10} ορθογώνιου κυματοδηγοῦ με τόν τύπο TM_{010} ενός κυλιν-
δρικοῦ αντηχείου .

6. ΔΙΑΔΟΣΗ ΜΕΣΑ ΣΕ ΙΟΝΙΣΜΕΝΟ ΜΕΣΟ.

(Μελέτη Έπίπεδου Κύματος σέ Ίονισμένο Μέσο)

Στά προηγούμενα (Κεφ. 3.5) μελετήσαμε τή διάδοση έπίπεδου κύματος σέ άγώγιμο μέσο. Στο κεφάλαιο αυτό θά έξετάσουμε τή διάδοση μέσα σέ ίονισμένο μέσο (π.χ. άέριο πλάσμα). Παρά τό ότι τό ίονισμένο μέσο μπορεί νά καταταγεϊ στους καλούς άγωγούς, δέν είναι δυνατή ή παραδοχή ότι σ >> ωε, καί έπομένως ή προηγούμενη μελέτη δέν έφαρμόζεται. Έπιπλέον, τό ίονισμένο μέσο γίνεται ά ν ι σ ό τ ρ ο π ο όταν ύπάρχει έξωτερικό μαγνητικό πεδίο \vec{B} , γιατί τότε τό ύλικό αποκτā μιā "προεξάρχουσα" κατεύθυνση καί έμφανίζει διαφορετικά χαρακτηριστικά διάδοσης πρός διαφορετικές διευθύνσεις.

Έπομένως είναι άναγκαία μιā πιο γενική μελέτη τής διάδοσης του έπίπέδου κύματος σέ ένα τέτοιο μέσο παρουσία μαγνητικού πεδίου.

6.1. Τανυστές τής Εύκνησιίας καί τής Είδικης Άγωγιμότητας του Ίονισμένου Μέσου Παρουσία Μαγν. Πεδίου.

"Ένα " ούδέτερο " άέριο πλάσμα άποτελεϊται από θετικά καί άρνητικά ιόντα μέ ίσα όλικά φορτία. Για τήν άπλότητα θά τό θεωρήσουμε ότι άποτελεϊται από ήλεκτρόνια καί θετικά ιόντα μέ πολύ μικρή θερμική διαταραχή (ψυχρό πλάσμα) καί χωρίς σημαντικές άλληλεπιδράσεις μεταξύ τών ιόντων (άραιό πλάσμα).

Έπειδή τά θετικά ιόντα είναι δυσκίνητα σέ σύγκριση μέ τά ήλεκτρόνια μπορούμε νά θεωρήσουμε τελικά τό μέσο σαν ά έ ρ ι ο ή λ ε κ τ ρ ο ν ί ω ν, πού δέν συγκρούονται μεταξύ τους.

Στό σχ. 6-1 διαλέγουμε τό καρτεσιανό σύστημα, πού έχει τόν άξονα z παράλληλο μέ τό έξωτερικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_{εξ}$, πού θεω-

ροῦμε ὅτι ἔχει σταθερή τιμή :

$$\vec{B}_{ex} = \vec{B}_0 \quad (6-1)$$

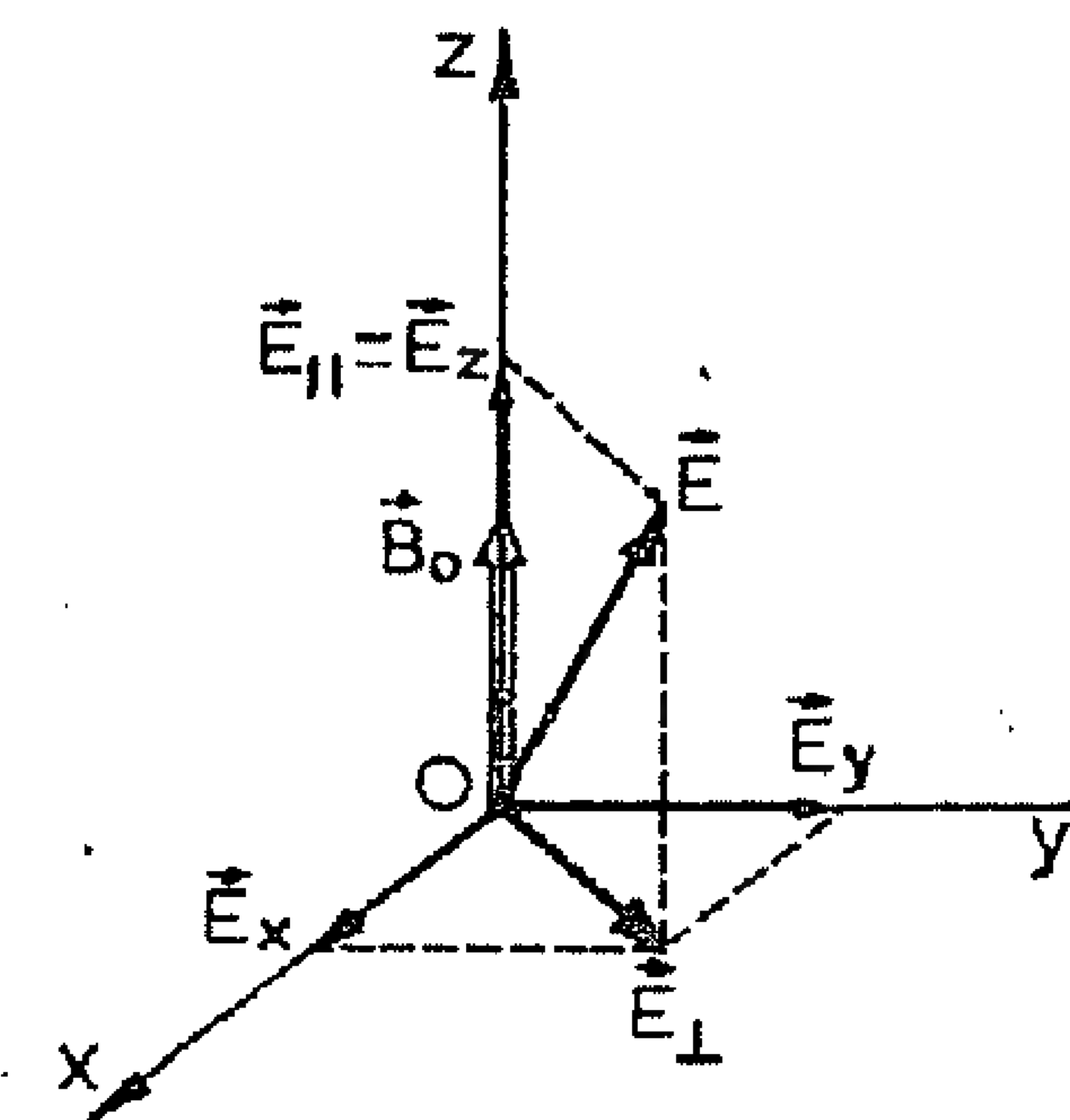
Ἐστω \vec{E} τὸ ἠλεκτρικὸ πεδίο ἐνὸς ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος ποῦ διαδύεται μέσα στὸ μέσο, καὶ \vec{B} τὸ μαγνητικὸ πεδίο. Ἐδῶ ὑποθέτουμε ὅτι

$$B \ll B_0 \quad (6-2)$$

ὥστε, πρακτικὰ, μέσα στὸ μέσο ἐπικρατεῖ τὸ σταθερὸ μαγνητικὸ πεδίο

\vec{B}_0 . Τὸ διάνυσμα \vec{E} ἔχει τυχαῖο προσανατολισμὸ καὶ ἀναλύεται σὲ μιά συνιστώσα παράλληλη μὲ τὸ μαγνητικὸ πεδίο ($\vec{E}_{||} = \vec{E}_z$ καὶ μιά κάθετη (\vec{E}_{\perp}), ποῦ ἀναλύεται παραπέρα στίς \vec{E}_x καὶ \vec{E}_y .

Τὸ διάνυσμα \vec{E} ἔχει τυχαῖο προσανατολισμὸ καὶ ἀναλύεται σὲ μιά συνιστώσα παράλληλη μὲ τὸ μαγνητικὸ πεδίο ($\vec{E}_{||} = \vec{E}_z$ καὶ μιά κάθετη (\vec{E}_{\perp}), ποῦ ἀναλύεται παραπέρα στίς \vec{E}_x καὶ \vec{E}_y .



Σχ. 6-1. Σύστημα συντεταγμένων γιὰ τὴ μελέτη ἐπίπεδου κύματος μέσα σὲ μαγνητόπλασμα.

Γιὰ συνηθισμένες ταχύτητες τῶν ἠλεκτρονίων ($v \ll c$) ἡ θερμολιώδης ἐξίσωση τῆς δυναμικῆς γράφεται γιὰ κάθε ἠλεκτρόνιο :

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = e (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}_0) \quad (6-3)$$

Προβάλλοντας τὴν (6-3) στοὺς τρεῖς ἄξονες x, y, z ἔχουμε :

$$E_x + v_y B_0 = \frac{m}{e} \frac{dv_x}{dt} \quad (6-4)$$

$$E_y - v_x B_0 = \frac{m}{e} \frac{dv_y}{dt} \quad (6-5)$$

$$E_z = \frac{m}{e} \frac{dv_z}{dt} \quad (6-6)$$

Θεωρούμε τώρα ότι το ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι μονοχρωματικό (άρμονικό) με κυκλική συχνότητα ω . Τα ηλεκτρόνια τότε θα εκτελούν εξαναγκασμένη κίνηση με κυκλική συχνότητα ω και η ταχύτητά τους θα μπορεί να περιγραφεί με μία εξίσωση της μορφής :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}) e^{j\omega t} \quad (6-7)$$

όπου

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}) \quad (6-8)$$

το φασικό διάνυσμα (phasor) της ταχύτητας.

Χρησιμοποιώντας τους phasors των πεδίων και της ταχύτητας στις (6-4), (6-5), (6-6) τις ξαναγράφουμε έτσι :

$$\left. \begin{aligned} E_x + v_y B_0 &= j\omega \frac{m}{e} v_x \\ E_y - v_x B_0 &= j\omega \frac{m}{e} v_y \\ E_z &= j\omega \frac{m}{e} v_z \end{aligned} \right\}$$

ή

$$\left. \begin{aligned} j\omega m v_x - e B_0 v_y &= e E_x \\ e B_0 v_x + j\omega m v_y &= e E_y \\ j\omega m v_z &= e E_z \end{aligned} \right\} \quad (6-9)$$

Η τρίτη εξίσωση από τις (6-9) δίνει :

$$v_z = \frac{e}{m} \frac{-j E_z}{\omega} \quad (6-10)$$

Από τη λύση του συστήματος των δύο πρώτων από τις (6-9) έχουμε :

$$v_x = \frac{e}{m} \frac{j\omega E_x + \frac{e}{m} B_0 E_y}{\frac{e^2}{m^2} B_0^2 - \omega^2} \quad (6-11)$$

$$v_y = \frac{e}{m} \frac{j\omega E_y - \frac{e}{m} B_0 E_x}{\frac{e^2}{m^2} B_0^2 - \omega^2} \quad (6-12)$$

Εισάγοντας τή γυρομαγνητική συχνότητα^{*)}.

$$\omega_g \equiv \frac{e}{m} B_0 \quad (6-13)$$

Ξαναγράφουμε τίσ εξισώσεις, πού δύνουν τίσ προβολές τής ταχύτητας, ἔτσι:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{e}{m} \frac{j\omega E_x + \omega_g E_y}{\omega_g^2 - \omega^2} \\ v_y &= \frac{e}{m} \frac{-\omega_g E_x + j\omega E_y}{\omega_g^2 - \omega^2} \\ v_z &= \frac{e}{m} \frac{-jE_z}{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (6-14)$$

πού μποροῦν νά γραφοῦν καί

$$\left. \begin{aligned} v_x &= j \frac{e}{m} \frac{\omega}{\omega_g^2 - \omega^2} E_x + \frac{e}{m} \frac{\omega_g}{\omega_g^2 - \omega^2} E_y + 0 \cdot E_z \\ v_y &= -\frac{e}{m} \frac{\omega_g}{\omega_g^2 - \omega^2} E_x + j \frac{e}{m} \frac{\omega}{\omega_g^2 - \omega^2} E_y + 0 \cdot E_z \\ v_z &= 0 \cdot E_x + 0 \cdot E_y - j \frac{e}{m\omega} E_z \end{aligned} \right\} \quad (6-15)$$

^{*)} Η ω_g εἶναι ἡ κυκλική συχνότητα, μέ τήν ὁποία περιφέρεται σέ κυκλική τροχιά ἓνα ἠλεκτρόνιο ὅταν ἐξαπολυθεῖ μέσα σ' ἓνα ὁμογενές μαγνητικό πεδίο B_0 μέ ταχύτητα κάθετη σ' αὐτό.

Μπορούμε νά συμπτύξουμε τὴν (6-15) ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{\vec{\sigma} = \vec{\tau} \cdot \vec{\mathcal{E}}} \quad (6-16)$$

ἢ

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} \end{bmatrix} \cdot [\mathcal{E}] \quad (6-17)$$

ὅπου

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{21} = -\tau_{12} & \tau_{22} = \tau_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} j \frac{e}{m} \frac{\omega}{\omega_g^2 - \omega^2} & \frac{e}{m} \frac{\omega_g}{\omega_g^2 - \omega^2} & 0 \\ -\frac{e}{m} \frac{\omega_g}{\omega_g^2 - \omega^2} & j \frac{e}{m} \frac{\omega}{\omega_g^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & -j \frac{e}{m\omega} \end{bmatrix} \quad (6-18)$$

εἶναι ὁ λεγόμενος τανυστὴς τῆς ἐκκλινῆσας .

Στὴν περίπτωση τοῦ μέσου, ποὺ ἐξετάζουμε, τὰ ρεύματα εἶναι ρεύματα μεταφορᾶς εἶναι δηλαδή :

$$\vec{\sigma} = \rho \vec{\sigma} = Ne \vec{\sigma} = Ne \vec{\tau} \vec{\mathcal{E}} \quad (6-19)$$

Ἀπὸ τὴν (6-19) μποροῦμε νά ὀρίσουμε ἕναν τανυστὴ ἐκκλινῆσας ἀγωγιμότητος :

$$\vec{\sigma} = Ne \vec{\tau} \quad (6-20)$$

ὅπου N ἡ πυκνότητα τῶν ἠλεκτρονίων καὶ νά γράψουμε

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma} \vec{\mathcal{E}} \quad (6-21)$$

καὶ

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \begin{bmatrix} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_g^2} & \frac{-j\omega\omega_g}{\omega^2 - \omega_g^2} & 0 \\ \frac{j\omega\omega_g}{\omega^2 - \omega_g^2} & \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_g^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-22)$$

μέ $\sigma_0 = -j \frac{Ne^2}{\omega m} \quad (6-23)$

Συμπεράσματα

- α. Όταν $\omega \neq \omega_g$ θά είναι πεπερασμένα τά v_x καί v_y καί τά ήλεκτρονία θά διαγράφουν, γενικά, έλλειπτικές έλικοειδεῖς τροχιές μέ άξονα τόν άξονα z , πού ή μορφή τους έξαρτάται από τά πλάτη τῶν προβολῶν E_x , E_y καί τήν τιμή τῆς ω_g (δηλ. τοῦ μαγνητικού πεδίου) καί από τήν κυκλική συχνότητα ω . Κατά τόν άξονα z ή κίνηση είναι παλινδρομική.
- β. Η παρουσία τοῦ έξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου \vec{B}_0 , επηρεάζει μόνο τίς κάθετες πρὸς τό πεδίο αὐτό συνιστώσες τῆς εἰδικῆς άγωγιμότητας.
- γ. Όταν $\omega \rightarrow \omega_g$ οἱ ταχύτητες v_x , $v_y \rightarrow \infty$. Τότε έχουμε τό λεγόμενο "γυρομαγνητικό συντονισμό", δηλαδή μιá έντονη άλληλεπίδραση τοῦ κύματος μέ τά ήλεκτρόνια. Στήν πράξη δέν γίνεται $v_x = v_y = \infty$ γιατί αναπτύσσονται συγκρούσεις, πού συνεχῶς αύξάνουν, μέ άποτέλεσμα οἱ v_x , v_y νά φτάνουν σέ μεγάλες, αλλά πεπερασμένες τιμές.
- δ. Όταν $\omega \gg \omega_g$ τότε

$$\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_g^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_g}{\omega}\right)^2} = \left(1 - \frac{\omega_g^2}{\omega^2}\right)^{-1} \simeq 1 + \frac{\omega_g^2}{\omega^2} = 1 + \epsilon \quad (6-24)$$

όπου

$$\epsilon = \frac{\omega_g^2}{\omega^2} \quad (6-25)$$

Όστε

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} = \begin{bmatrix} 1+\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1+\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & j\frac{\omega_g}{\omega} & 0 \\ -j\frac{\omega_g}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-26)$$

Από την έκφραση αυτή μπορούμε να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα:

- δ1. Η αγωγιμότητα διατηρεί την τιμή σ_0 που είχε χωρίς μαγνητικό πεδίο \vec{B}_0 μόνο κατά τη διεύθυνση του \vec{B}_0 (άξονας z).
- δ2. Οι δύο πρώτοι όροι της διαγωνίου της πραγματικής μήτρας διαφέρουν από τον τρίτο (μονάδα) κατά το ποσό $\epsilon = \omega_g^2 / \omega^2$ δεύτερου βαθμού ως προς ω_g / ω . Η μικρή αυτή μεταβολή της αγωγιμότητας κατά τις διευθύνσεις τις κάθετες προς το \vec{B}_0 είναι ή λεγόμενη "μαγνητοαντίσταση^{*)}".
- δ3. Ο δεύτερος προσθετέος της μήτρας $\bar{\sigma} / \sigma_0$ εκφράζει το γνωστό "φανόμενο Hall", που είναι φαινόμενο πρώτου βαθμού του ω_g / ω και εκδηλώνεται κατά τις κάθετες προς το \vec{B}_0 και προς το \vec{E} διευθύνσεις.
- ε. "Αν $\omega_g \gg \omega$ οι όροι της μαγνητοαντίστασης και του φαινομένου Hall τείνουν να μηδενιστούν.

*) "Ας θυμηθούμε από τη Γενική Φυσική ότι μαγνητοαντίσταση είναι ή ανηγμένη μεταβολή της είδ. αντίστασης ή της ειδικής αγωγιμότητας, λόγω του μαγνητικού πεδίου κατά τις διευθύνσεις τις εγκάρσιες προς το πεδίο αυτό..

6.2. Ο Τανυστής της Διηλεκτρικής Σταθεράς.

Στήν ανάλυσή μας θεωρούμε μεταξύ των ηλεκτρονίων ότι υπάρχει κενό (δηλ. $\epsilon = \epsilon_0$ ή διηλεκτρική σταθερά του κενού). Μακροσκοπικά όμως, η ενεργός διηλεκτρική σταθερά είναι τανυστής που περιέχει τον τανυστή της αγωγιμότητας και προκύπτει από την πρώτη εξίσωση του Maxwell :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\epsilon_0\vec{E} = (\vec{\sigma} + j\omega\epsilon_0)\vec{E} \quad (6-27)$$

Γράφοντας $\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\bar{\epsilon}\vec{E} \quad (6-28)$

ορίζουμε την " ενεργό διηλεκτρική σταθερά " .

$$\boxed{\bar{\epsilon} = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\vec{\sigma}}{j\omega\epsilon_0} \right)} \quad (6-29)$$

Ορίζοντας τη συχνότητα πλάσματος $\omega_p^{**})$ με τη σχέση:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \quad (6-30)$$

και γράφοντας:

$$\frac{\vec{\sigma}}{j\omega\epsilon_0} = \frac{-j \frac{Ne^2}{m\omega}}{j\omega\epsilon_0} = \frac{-Ne^2}{m\omega^2\epsilon_0} = \frac{-\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}}{\omega^2} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (6-31)$$

έχουμε :

*) "Αν ένα ούδέτερο νέφος φορτίων (πλάσμα) διαταραχθεί, αποδειχνεται ότι μπορεί να τεθεί σε ταλάντωση στη συχνότητα ω_p . Στήν ταλάντωση του πλάσματος της ηλιακής ατμόσφαιρας οφείλονται όρισμένοι τύποι ακτινοβολίας που δέχεται η γη από τον ήλιο.

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_g^2 - \omega^2} & \frac{-j\omega_p^2 \omega_g}{\omega(\omega_g^2 - \omega^2)} & 0 \\ \frac{j\omega_p^2 \omega_g}{\omega(\omega_g^2 - \omega^2)} & 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_g^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & -j\epsilon_{12} & 0 \\ j\epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (6-32)$$

όπου

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} \quad (6-33)$$

και

$$\epsilon_{21} = \epsilon_{12} \quad (6-34)$$

Από την (6-32) προκύπτει η μήτρα της "σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς"

$$\bar{\epsilon}_r \equiv \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_0} \quad (6-35)$$

Μερικά Συμπεράσματα για την περίπτωση $B_0 \rightarrow 0$
(δηλ. $\frac{\omega_g}{\omega} \rightarrow 0$).

α. Η (6-32) απλοστεύεται στην :

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-36)$$

Δηλαδή το μέσο είναι ισότροπο με $\epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$ και στην περίπτωση αυτή περίπτωση ο δείκτης της διάθλασης του μέσου θα είναι :

$$\eta \equiv \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon \mu_0}{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (6-37)$$

β. Αν η κυκλική συχνότητα ω τείνει προς την ω_p , τότε

$$\epsilon \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad \eta \rightarrow 0 \quad (6-38)$$

και παύει κάθε διάδοση.

Θά αποδείξουμε, όμως, ότι η διάδοση σταματά για όλη την περιοχή συχνοτήτων $\omega \leq \omega_p$, όπου ϵ και η είναι φανταστικά.

Η σταθερά διαδόσεως γ ενός επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος που τρέχει μέσα σε πλάσμα χωρίς μαγνητικό πεδίο (βλ. κεφ. 3.5) είναι :

$$\gamma = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right)} \quad (6-39)$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις :

β_1 . Για $\omega = \omega_p$ είναι :

$$\gamma = 0 \quad (6-40)$$

δηλ. τό επίπεδο κύμα δεν διαδύεται.

β_2 . Για $\omega < \omega_p$ είναι :

$$\gamma = \alpha > 0 \quad (6-41)$$

τό κύμα δεν είναι τρέχον αλλά μιά ταλάντωση με πλάτος που φθίνει με την απόσταση.

β_3 . Για $\omega > \omega_p$ είναι :

$$\gamma = j\beta = j\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)} \quad (6-42)$$

τιμή που αντιστοιχεί σε τρέχον κύμα με αμείωτο πλάτος.

Τό πλάσμα, λοιπόν, εμφανίζει μιά κρίσιμη συχνότητα f_p :

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{N}{\epsilon_0 m}} \quad (6-43)$$

κάτω από την οποία δεν γίνεται διάδοση .

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές των e, ϵ_0 και m στην (6-43)

βρίσκουμε τη σχέση :

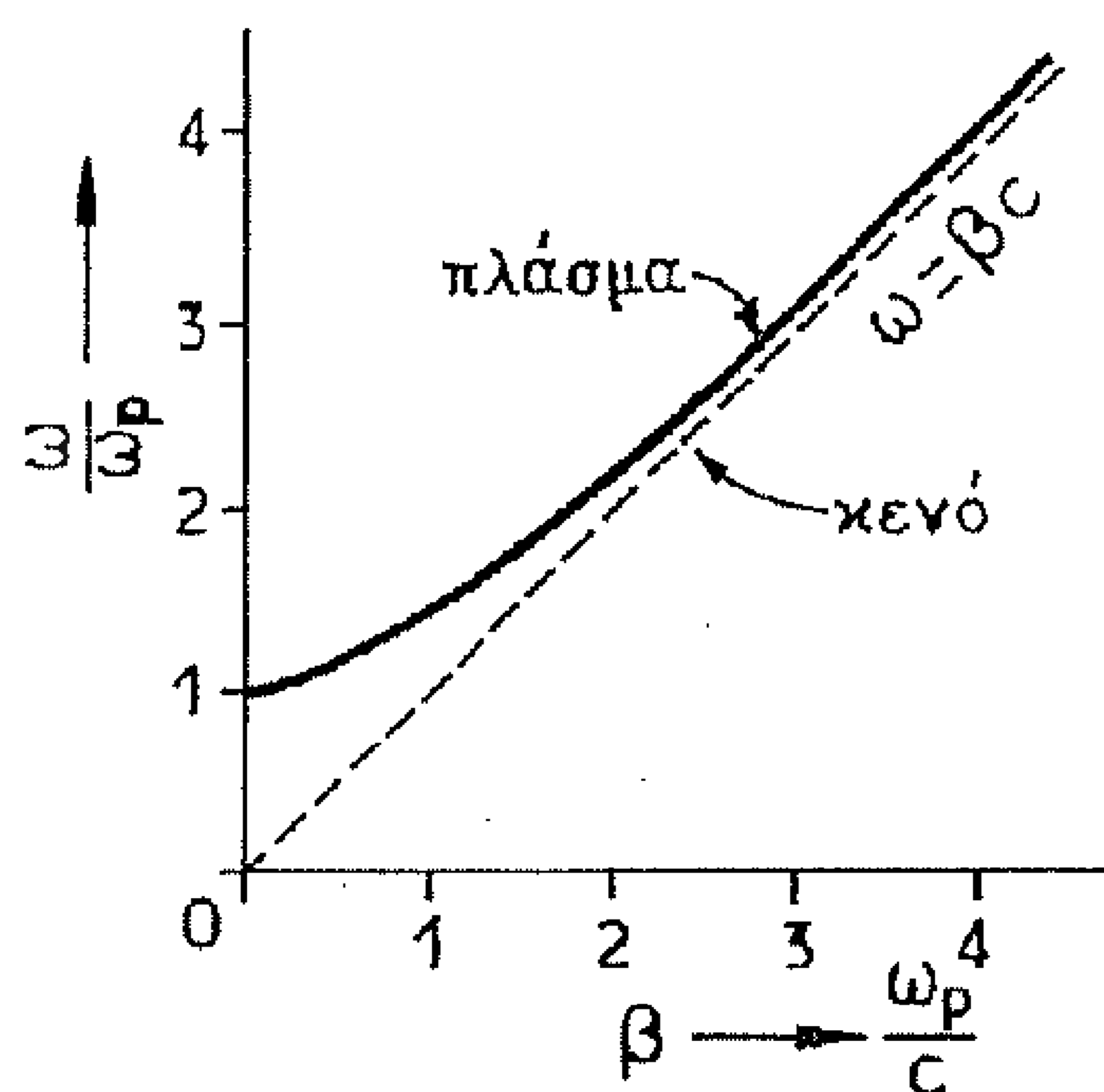
$$f_p = 9 \sqrt{N} \quad (6-44)$$

πού δίνει την f_p σε H_z αν η N είναι σε ηλεκτρόνια/ m^3 .

Σαν παράδειγμα αναφέρουμε ότι η ηλεκτρονική πυκνότητα N του πλάσματος της γήινης ιονόσφαιρας παίρνει συχνά τιμές της τάξης 10^{12} ηλ/ m^3 , που αντιστοιχεί σε κρίσιμη συχνότητα $f_p = 9$ MHz.

Γι' αυτό, λοιπόν, η περιοχή συχνοτήτων, που χρησιμοποιούν τά γήινα ραδιοτηλεσκόπια περιορίζεται πάνω από τη συχνότητα 10MHz, εξαιτίας ακριβώς της ιονοσφαιρικής αποκοπής.

Αν βγούμε έξω από τη μαγνητόσφαιρα (μέ πυράιλους, δορυφόρους ή άλλα διαστημικά όχηματα) μπορούμε να υποβιβάσουμε τη συχνότητα



Σχ. 6-2. Σχέση β και ω στο πλάσμα άπουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

τα παρατήρησης μέχρι ≈ 30 kHz γιατί ως εκεί επιτρέπει η συχνότητα f_p του διαπλανητικού πλάσματος ($N = 10$ ηλ/ cm^3)

"Εξίσωση διασποράς". Για $\omega > \omega_p$, όπως είδαμε ισχύει η (6-42) που μπορεί να πάρει την τελική μορφή:

$$\omega^2 = c^2 \beta^2 + \omega_p^2 \quad (6-45)$$

Από την (6-45) προκύπτει η εξίσωση της διασποράς $\omega = \sigma(\beta)$ του πλάσματος χωρίς μαγνητικό πεδίο.

Η γραφική παράσταση της $\omega = \sigma(\beta)$ δίνεται στο σχήμα 6.2.

6.3. Σταθερά της Διάδοσης και Δείκτης Διάθλασης.

"Ας διατυπώσουμε τη διανυσματική διαφορική εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} μέσα στο πλάσμα .

Από τη δεύτερη εξίσωση του Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} \quad (6-46)$$

Έχουμε:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{H} \quad (6-47)$$

Από τη σχέση (6-28) όμως έχουμε:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\vec{E} \quad (6-48)$$

ώστε η (6-47) γίνεται:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \omega^2\mu_0\vec{E} \quad (6-49)$$

Ζητούμε μία γενική επίπεδη λύση της μορφής :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} e^{j\omega t} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (6-50)$$

χρησιμοποιώντας, την τελεστική αντιστοίχια

$$\vec{\nabla} \leftrightarrow -j\vec{k} \quad (6-51)$$

στην (6-49) έχουμε :

$$-j\vec{k} \times (-j\vec{k}) \times \vec{E} - \omega^2\mu_0\vec{E} = 0 \quad (6-52)$$

ή έπειτα

$$\vec{E} = \epsilon_0 \vec{E}_r \quad \text{και} \quad \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \quad (6-53)$$

είναι:

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{E} = 0 \quad (6-54)$$

Χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \quad (6-55)$$

γράφουμε την (6-54) έτσι :

$$(\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} - k^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\epsilon}_r \vec{E} = 0 \quad (6-56)$$

Ορίζοντας τον ταυυστή

$$\overline{\overline{k}} = \begin{bmatrix} k_x k_x & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & k_y k_y & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & k_z k_z \end{bmatrix} \quad (6-57)$$

γράφουμε την (6-56) με τη μορφή :

$$\left[\overline{\overline{k}} - k^2 \overline{\overline{I}} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{\epsilon}_r \right] \vec{E} = 0 \quad *) \quad (6-58)$$

θέτοντας :

$$\overline{\overline{D}} \equiv \left[\vec{\epsilon}_r - \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 k^2 \overline{\overline{I}} + \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \overline{\overline{k}} \right] \quad (6-59)$$

γράφουμε :

$$\overline{\overline{D}} \cdot \vec{E} = 0 \quad (6-60)$$

Η σχέση αυτή δίνει τρεις γραμμικές ομογενείς εξισώσεις ως προς τις τρεις συνιστώσες του \vec{E} . Για να είναι το σύστημα αυτό επιλύσιμο θα πρέπει η ορίζουσα D της μήτρας $\overline{\overline{D}}$ να είναι μηδέν.

Δηλαδή :

$$D(\vec{k}, \omega) = 0 \quad (6-61)$$

*) Μέ $\overline{\overline{I}}$ συμβολίζουμε τη μοναδιαία μήτρα $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Η (6-58) με τη μορφή δεικτών γράφεται :

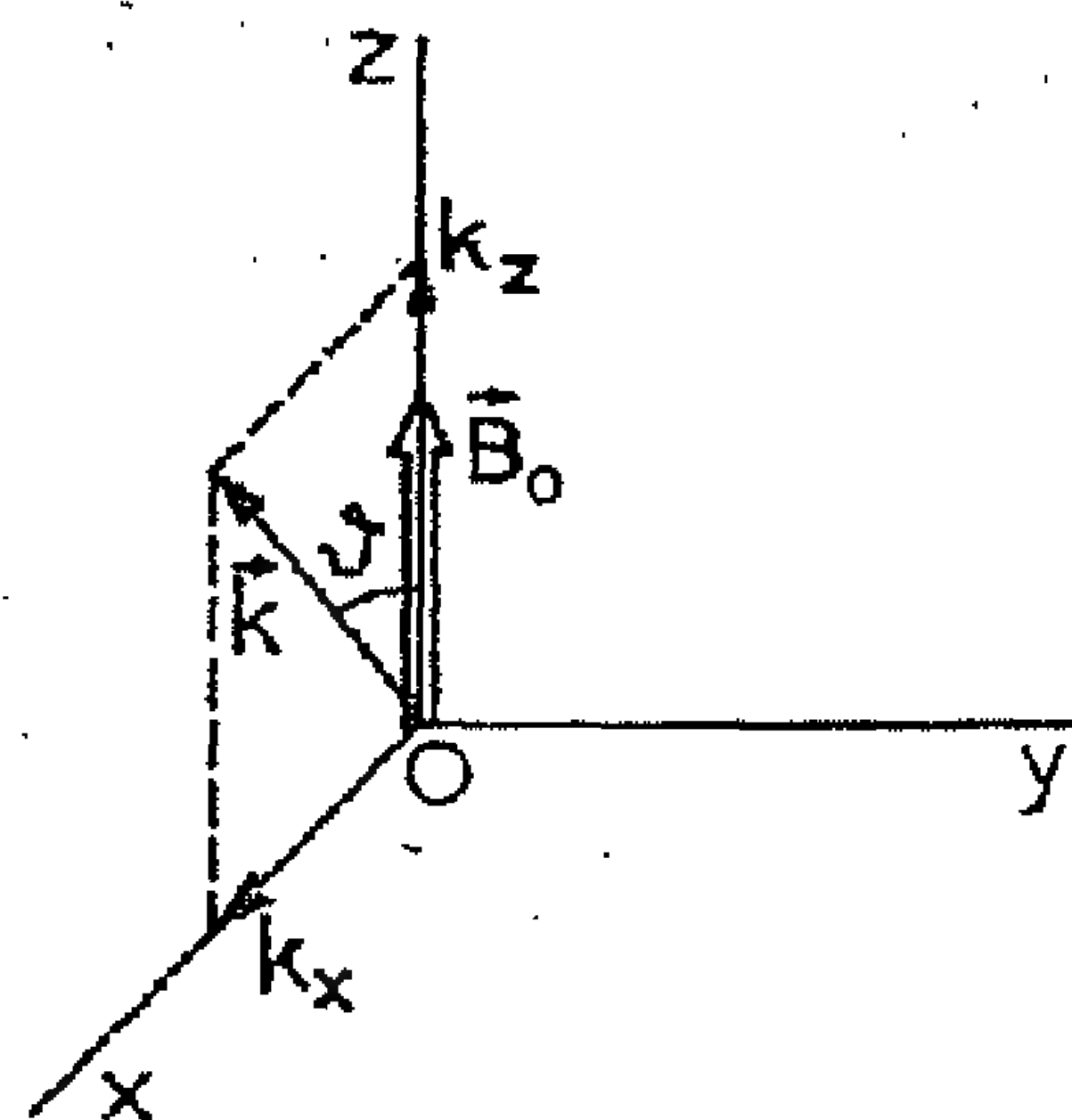
$$\left[k_i k_j - k^2 \delta_{ij} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon_{ij} \right] E_j = 0 \quad i, j = x, y, z$$

όπου δ_{ij} τό δέλτα του Kronecker .

Ἡ (6-61) εἶναι ἡ λεγόμενη ἐξίσωσις τῆς διασπο-
ρᾶς (dispersion equation). Οἱ λύσεις τῆς δύνουν τοὺς διάφο-
ρους κυματικούς τύπους ποὺ μποροῦν
νά διαδοθοῦν στὸ μαγνητόπλάσμα.

Ἄν πάρουμε τὸ σύστημα τῶν καρτεσια-
νῶν συντεταγμένων ὅπως δείχνει τὸ
σχ. 6-3 ἔχουμε :

$$\overline{\overline{k}k} = \begin{bmatrix} k^2 \sin^2 \vartheta & 0 & k^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\ 0 & 0 & 0 \\ k^2 \sin \vartheta \cos \vartheta & 0 & k^2 \cos^2 \vartheta \end{bmatrix}$$



Σχ. 6-3

καὶ

$$\overline{\overline{D}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2 \cos^2 \vartheta & -j\epsilon_{12} & \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\ j\epsilon_{12} & \epsilon_{11} - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2 & 0 \\ \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2 \sin \vartheta \cos \vartheta & 0 & \epsilon_{33} - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2 \sin^2 \vartheta \end{bmatrix} \quad (6-62)$$

Ἡ ἐξίσωσις διασπορᾶς (6-61) γράφεται :

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{11} - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2 \cos^2 \vartheta & -j\epsilon_{12} & \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\ j\epsilon_{12} & \epsilon_{11} - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2 & 0 \\ \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2 \sin \vartheta \cos \vartheta & 0 & \epsilon_{33} - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2 \sin^2 \vartheta \end{vmatrix} = 0 \quad (6-63)$$

Γιὰ τὴν ἐπιλύσιν τῆς θέτουμε :

$$\xi \equiv \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2 \quad (6-64)$$

καὶ καταλήγουμε στὴ δευτεροβάθμια ἐξίσωσις :

$$(\epsilon_{11} \sin^2 \vartheta + \epsilon_{33} \cos^2 \vartheta) \xi^2 - [2\epsilon_{11} \epsilon_{33} + (\epsilon_{11}^2 - \epsilon_{12}^2 - \epsilon_{11} \epsilon_{33}) \sin^2 \vartheta] \xi + \epsilon_{33} (\epsilon_{11}^2 - \epsilon_{12}^2) = 0 \quad (6-65)$$

Από τή λύση τῆς τελευταίας προκύπτει:

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{(\epsilon_{11}^2 - \epsilon_{12}^2 - \epsilon_{11}\epsilon_{33})\sin^2\vartheta + 2\epsilon_{11}\epsilon_{33} \pm \sqrt{(\epsilon_{11}^2 - \epsilon_{12}^2 - \epsilon_{11}\epsilon_{33})^2 \sin^4\vartheta + 4\epsilon_{12}^2 \epsilon_{33}^2 \cos^2\vartheta}}{2[(\epsilon_{11} - \epsilon_{33})\sin^2\vartheta + \epsilon_{33}]} \quad (6-66)$$

Γιά νά διαδοθεῖ λοιπόν μέσα στό μαγνητόπλάσμα ἓνα ἠλεκτρομαγνητικό κύμα, μέ κυκλική συχνότητα ω , κατά μιά ὀρισμένη διεύθυνση ϑ ὡς πρὸς τό ἐξωτερικό πεδίο \vec{B}_0 , θά πρέπει τό κυματάνυσμά του \vec{k} νά ἱκανοποιεῖ τή σχέση (6-66).

Ἐχοντας τό \vec{k} μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τό δείκτη τῆς διάθλασης \vec{n} γιὰτί εἶναι :

$$\vec{n} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \quad (6-67)$$

Συμπεράσματα .

α. Ὡς τώρα ἔχουμε ὑποθέσει ὅτι τό πλάσμα εἶναι ἄραιό καί ψυχρό (χωρίς δηλ. συγκρούσεις τῶν φορέων μεταξύ τους). Στήν περίπτωση αὐτή ἡ ἐξασθένιση τοῦ κύματος θά εἶναι μηδαμινή καί τό k θά εἶναι πραγματικό, θά εἶναι δηλαδή μιά σταθερά φάσης β .

β. Ἄν τό ω εἶναι ἀρκετά μεγαλύτερο ἀπό τό ω_g , ὥστε νά ἔχουμε:

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} \simeq \epsilon_{33} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (6-68)$$

ἀλλά ὅχι τόσο μεγάλο ὥστε τό ϵ_{12} νά θεωρηθεῖ μηδέν, ἀλλά

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21} \simeq \frac{-\omega_p^2 \omega_g}{\omega^3} \quad (6-69)$$

τότε ἡ (6-66) ἀπλουστεύεται :

$$k^2 = \beta^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_{11} \left\{ 1 - \frac{\epsilon_{12}^2}{2\epsilon_{11}^2} \left(\sin^2\vartheta \pm \sqrt{\sin^4\vartheta + \left(\frac{2\epsilon_{11}\cos\vartheta}{\epsilon_{12}}\right)^2} \right) \right\} \quad (6-70)$$

- γ. "Αν τό κύμα διαδίδεται παράλληλα πρὸς τό πεδίο \vec{B}_0 ($\theta = 0$) , (" δ ι α μ ή κ η ς " δ ι ά δ ο σ η -longitudinal propagation), ἡ (6-70) δύνει :

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{11} \pm \epsilon_{12}} \quad (6-71)$$

Χρησιμοποιώντας τήν (6-71) , (6-62) καί (6-60) μπορούμε νά δείξουμε ὅτι ἡ πόλωση τῶν κυμάτων, πού εἶναι δυνατό νά διαδοθοῦν, θά εἶναι κυκλική, δεξιόστροφη ἢ ἀριστερόστροφη. Στή γενική περίπτωση ἀποδείχνεται ὅτι τό κύμα ἀναλύεται σέ δύο τέτοια κύματα.

- δ. "Ας ζητήσουμε τώρα λύσεις, γιά κύμα πού διαδίδεται κάθετα πρὸς τό \vec{B}_0 ($\theta = 90^\circ$) (" ε γ κ ά ρ σ ι α " δ ι ά δ ο σ η -transverse propagation). Στήν περίπτωση αὐτή ἡ (6-70) δύνει δύο τιμές τοῦ β :

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{11}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{33}} \quad (6-72)$$

καί
$$\beta_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_{11}^2 - \epsilon_{12}^2}{\epsilon_{11}}} \quad (6-73)$$

Μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ὅτι στήν πρώτη περίπτωση (6-72) τό \vec{E} εἶναι γραμμικά πολωμένο παράλληλα πρὸς τό \vec{B}_0 ὅποτε, ὅπως φαίνεται ἀπό τήν (6-72) ἡ διάδοση γίνεται σάν νά μήν ὑπῆρχε τό μαγνητικό πεδίο.

Τό κύμα τότε λέγεται *τ α κ τ ι κ ή ἀ κ τ ῖ ν α* (ordinary ray).

Στή δεύτερη περίπτωση τό κύμα εἶναι γραμμικά πολωμένο κάθετα πρὸ ἐξωτερικό πεδίο \vec{B}_0 καί λέγεται *ἐ κ τ α κ τ η ἀ κ τ ῖ ν α* (extraordinary ray)

Από τὰ προηγούμενα βγάζουμε τό συμπέρασμα ὅτι στή γενική περίπτωση γραμμικά πολωμένου κύματος κατά γωνία α ὡς πρὸς τό \vec{B}_0 μποροῦμε νά ἀναλύσουμε τό διάνυσμα τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου σέ δύο συνιστώσες: μιά παράλληλη καί μιά κάθετη πρὸς τό \vec{B}_0 . Δηλαδή τό γραμμικά πολωμένο κύμα ἀποτελεῖται ἀπὸ μιά τακτική ἀκτίνα καί μιά ἑκτακτη ἀκτίνα.

Στήν περίπτωση τῆς ἑκτακτης ἀκτίνος ἀποδεδείχνεται ὅτι ὑπάρχει καί συνιστώσα διαμήκης τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου ($E_x \neq 0$).

Γιὰ τήν τακτική ἀκτίνα βλέπουμε ὅτι ὁ δείκτης τῆς διάθλασης ἡ εἶναι :

$$n = \left(\frac{c}{\omega}\right) \beta_1 = \sqrt{\epsilon_{33}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (6-74)$$

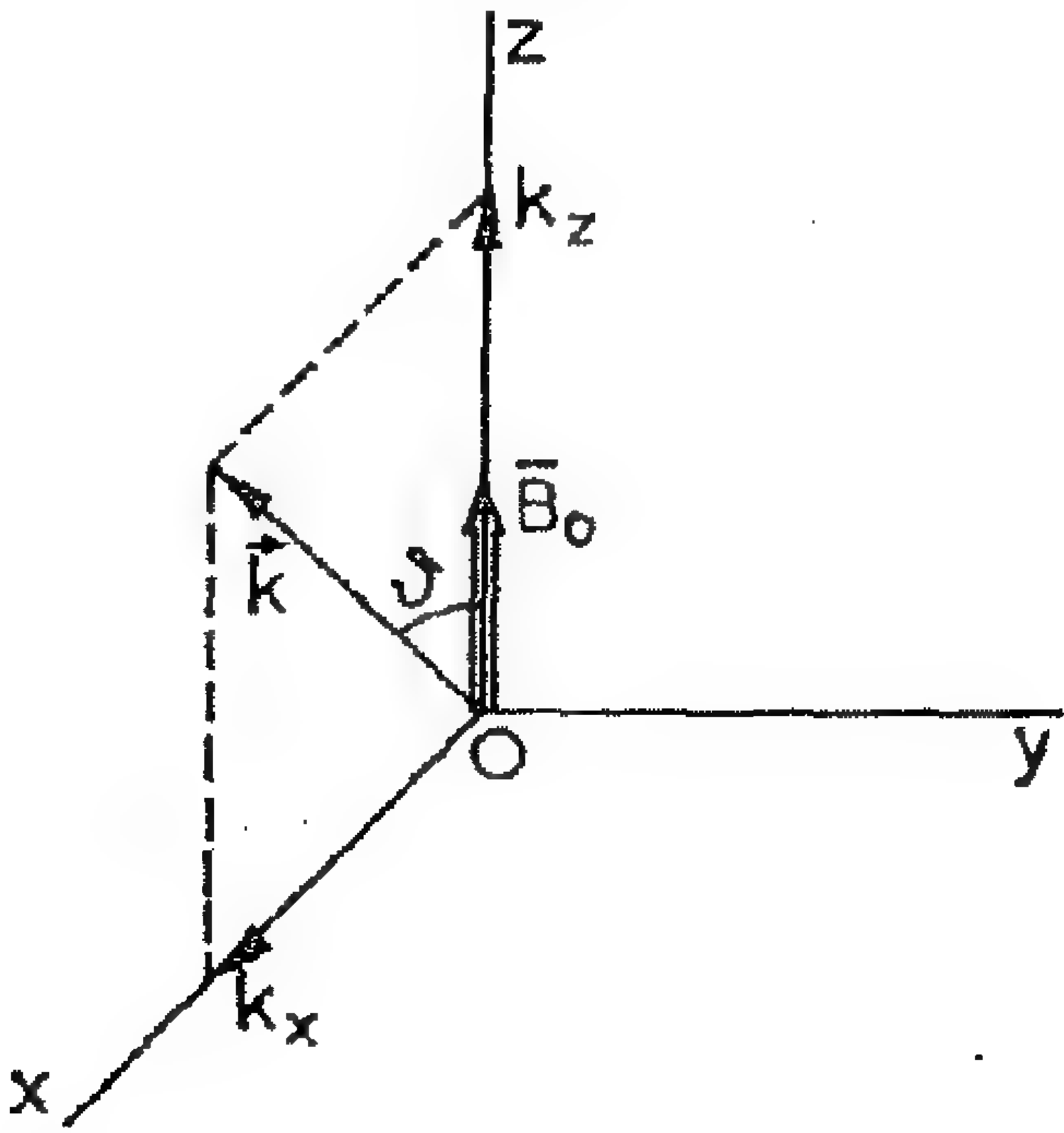
δηλαδή βρίσκουμε τή σχέση διάδοσης χωρὶς μαγνητικό πεδίο \vec{B}_0 , (ἀπὸ ὅπου καί τό ὄνομα τακτική).

ε. Λόγο πρὸ γενικῆς εἶναι οἱ ἐνδιάμεσες περιπτώσεις ὅπου τό θ εἶναι μικρό (σχεδόν διαμήκης διάδοση - quasi-longitudinal) ἢ εἶναι $\theta = 90^\circ$ (σχεδόν ἐγκάρσια διάδοση - quasi-transverse).

Στόν πύνακα τῆς ἐπόμενης σελίδας συνοψίζονται οἱ σταθερές τῆς διάδοσης γιὰ τήν κάθε περίπτωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6-I

Σταθερές Διάδοσης στο Μαγνητόπλάσμα

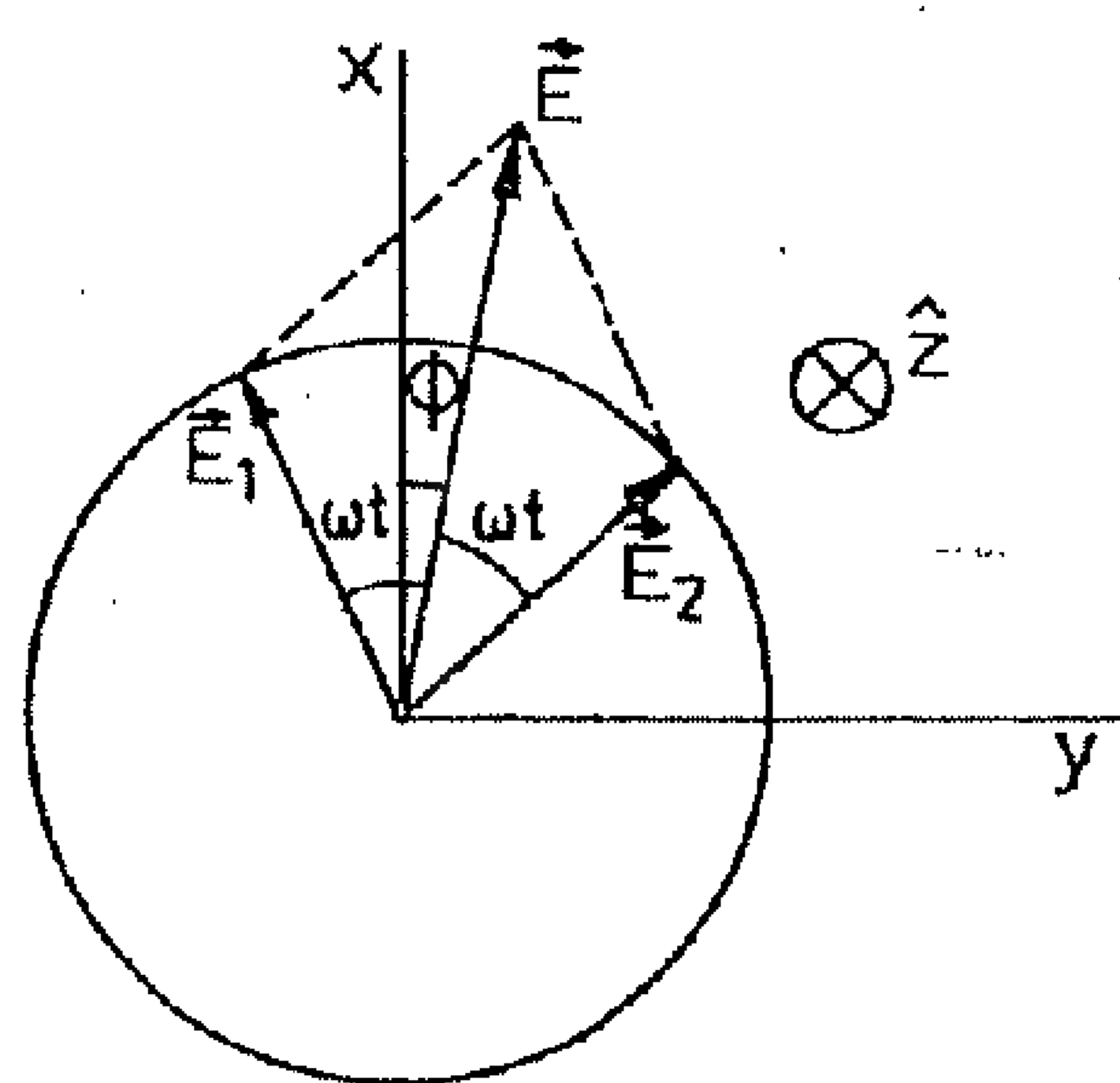
Σχεδόν διαμήκης διάδοση ($\vartheta \simeq 0^\circ$) (ή $\vartheta \simeq 180^\circ$)	$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{11} \pm \epsilon_{12} \cos \vartheta}$
Σχεδόν εγκάρσια " ($\vartheta \simeq 90^\circ$)	$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{11} - (1 \pm 1) \frac{\epsilon_{12}^2}{2\epsilon_{11}} \sin^2 \vartheta}$
Διαμήκης " ($\parallel \vec{B}_0, \vartheta = 0^\circ$)	$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{11} \pm \epsilon_{12}}$
Εγκάρσια " ($\perp \vec{B}_0, \vartheta = 90^\circ$) — Τακτική ακτίνα : $\vec{E} \parallel \vec{B}_0$ — Έκτακτη ακτίνα : $\vec{E} \perp \vec{B}_0$	$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{33}}$ $\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_{11}^2 - \epsilon_{12}^2}{\epsilon_{11}}}$
Γιά ω αρκετά μεγαλύτερο από το ω_g και : $\epsilon_{11} = \epsilon_{33} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ και $\epsilon_{12} = \frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega(\omega_g^2 - \omega^2)} \simeq -\frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega^3}$	
	

6.4. Στροφή Faraday.

Τό 1845 ό Faraday άνακάλυψε ότι όρισμένες ούσίες γίνονται όπτικά "ένεργές" όταν τοποθετηθοϋν σέ μαγνητικό πεδίο παράλληλο μέ τή διεύθυνση τής διάδοσης τοϋ φωτός.

"Όταν δηλ. διαδίδεται μέσα τους γραμμικά πολωμένο φως, τό επίπεδο πόλωσης του στρέφεται σέ γωνία άνάλογη πρός τήν ένταση τοϋ μαγνητικοϋ πεδίου καί άνάλογη πρός τό μήκος τής διαδρομής μέσα στήν ούσία. Τό φαινόμενο αυτό παρατηρεΐται καί στό μαγνητόπλασμα καί τό μελετᾶμε παρακάτω.

"Όπως εΐδαμε στήν προηγούμενη παράγραφο, σχεδόν διαμήκης, ή



Σχ. 6-4.

διαμήκης, διάδοση μέσα στό μαγνητόπλασμα εΐναι δυνατό νά γύνει όταν τό κύμα εΐναι δεξιόστροφα ή άριστερόστροφα κυκλικά πολωμένο καί στήν κάθε περίπτωση ή σταθερά τής διάδοσης δύνεται στόν Πύνακα 6-1

"Ένα γραμμικά πολωμένο κύμα, όμως, μπορεΐ νά αναλυθεΐ σέ δύο κυκλικά πολωμένα μέ άντίρροπη πόλωση-δεξιόστροφο καί άριστερόστροφο.

Τό σχ. 6-4 δείχνει πώς δύο κυκλικά πολωμένα κύματα \vec{E}_1 καί \vec{E}_2 μέ ΐσα πλάτη καί άντίρροπη πόλωση συνθέτουν ένα γραμμικά πολωμένο κύμα, πού σχηματίζει γωνία Φ μέ τόν άξονα x .

Κάθε ένα άπό αυτά τά δύο κυκλικά πολωμένα κύματα μπορεΐ νά διαδοθεΐ καί μέσα στό μαγνητόπλασμα καί μάλιστα μέ τή δική του σταθερά φάσης.

Στήν περίπτωση τής "σχεδόν διαμήκους" διάδοσης ή σταθερά φάσης γιά τό κάθε κύμα εΐναι :

$$\beta^{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{11} \pm \epsilon_{12} \cos \vartheta} \quad (6-75)$$

Οι στοιχειώδεις μεταβολές φάσης των δύο κυμάτων για μία στοιχειώδη μετακίνηση dl θα δύνονται από τις :

$$d\Phi_1 = \beta^- dl \quad (6-76)$$

$$d\Phi_2 = \beta^+ dl \quad (6-77)$$

Λόγω της ανισότητας των σταθερών β για τα δύο κύματα, το επίπεδο πολώσεως του ολικού πεδίου θα υποστεί μία στοιχειώδη στροφή:

$$d\Phi = \frac{\beta^- - \beta^+}{2} dl \quad (6-78)$$

Για τη σχεδόν διαμήκη διάδοση ($q \parallel$) ο άξονας της διάδοσης σχηματίζεται με τον άξονα z του μαγνητικού πεδίου μικρή γωνία $\theta \approx 0$. Υποθέτοντας ότι $\omega \gg \omega_g$ και $\omega \gg \omega_p$ μπορεί ν' αποδείξει κανείς ότι ^{*)} :

$$\frac{\beta^- - \beta^+}{2} \approx \frac{1}{2c} \frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega^2} \cos \vartheta \quad (6-79)$$

^{*)} Είναι $\beta^- = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega^3} \cos \vartheta} = \frac{\omega}{c} (1-x)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{x}{2}\right)$ όπου

$$x = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega^3} \cos \vartheta = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_g}{\omega} \cos \vartheta\right) \ll 1$$

Με τον ίδιο τρόπο $\beta^+ = \frac{\omega}{c} (1-x')^{\frac{1}{2}} \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{x'}{2}\right)$ όπου

$$x' = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega^3} \cos \vartheta \ll 1$$

Άρα: $\frac{\beta^- - \beta^+}{2} = \frac{\omega}{2c} \left(\frac{x' - x}{2}\right) = \frac{1}{2c} \frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega^2} \cos \vartheta$

Θέτοντας

$$\omega_g = \frac{e B_0}{m}, \quad \omega = 2\pi f \quad \text{και} \quad \omega_p^2 = \frac{N e^2}{\epsilon_0 m} \quad \text{έχουμε:}$$

$$\frac{\beta^- - \beta^+}{2} = \frac{N e^3 B_0 \cos \vartheta}{8 \pi^2 c \epsilon_0 m^2 f^2}$$

$$\frac{\beta_- - \beta_+}{2} = \frac{Ne^3 B_0 \cos \vartheta}{8\pi^2 c \epsilon_0 m^2 f^2} \quad (6-80)$$

Ωστε η στοιχειώδης "στροφή Faraday" $d\Phi_{ql}$ για τη σχεδόν διαμήκη διάδοση είναι :

$$d\Phi_{ql} = \frac{Ne^3 B_0 \cos \vartheta}{8\pi^2 c \epsilon_0 m^2 f^2} dl \quad (6-81)$$

Αν τ είναι το όλικό μήκος της διαδρομής μέσα στο μαγνητόπλάσμα, τότε η "ολική στροφή Faraday" για τη σχεδόν διαμήκη διάδοση είναι :

$$\Phi_{ql} = \frac{e^3}{8\pi^2 c \epsilon_0 m^2 f^2} \int_0^{\tau} N B_0 \cos \vartheta dl \quad (6-82)$$

Αν τά B_0 και ϑ είναι σταθερά τότε έχουμε :

$$\Phi_{ql} = \frac{e^3 B_0 \cos \vartheta}{8\pi^2 c \epsilon_0 m^2 f^2} \int_0^{\tau} N dl \quad (6-83)$$

ή σε πρακτική μορφή :

$$\Phi_{ql} (\text{ακτίνια}) = \frac{2,36 \cdot 10^{-3}}{f^2 (\text{MHz})} \int_0^{\tau} N \left(\frac{\eta \lambda}{\text{cm}^3} \right) B_{(\text{Gauss})} dl \quad (6-84)$$

Η (6-83) μάς επιτρέπει νά υπολογίσουμε τό μέγεθος :

$$N_T = \int_0^{\tau} N dl \quad (6-85)$$

δηλ. τόν όλικό άριθμό ήλεκτρονίων, πού υπάρχουν σε μία στήλη από τό ύλικό μέ μήκος τ και μοναδιαία διατομή, άν ξέρουμε τά B_0 και ϑ και μετρήσουμε τήν Φ_{ql} σε κάποια συχνότητα f .

Ανάλογα για την "σχεδόν εγκάρσια" διάδοση (quasi-transverse) όταν $\theta = 90^\circ$, βρίσκουμε :

$$d\Phi_{qt} = \frac{Ne^4 B_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^3 c f^3 m^3 \epsilon_0} dl \quad (6-86)$$

$$\Phi_{qt} = \frac{e^4}{32\pi^3 c f^3 m^3 \epsilon_0} \int_0^T NB_0^2 \sin^2 \theta dl \quad (6-87)$$

Για τις ειδικές περιπτώσεις longitudinal ($\theta = 0$) και transverse ($\theta = 90$) η (6-81) και η (6-86) δίνουν :

$$d\Phi_l = \frac{Ne^3 B_0}{8\pi^2 c \epsilon_0 m^2 f^2} dl \quad (6-88)$$

$$d\Phi_t = \frac{Ne^4 B_0^2}{32\pi^3 c f^3 m^3 \epsilon_0} dl \quad (6-89)$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει :

$$\frac{d\Phi_l}{d\Phi_t} = \frac{4\pi f m}{e B_0} = \frac{2m\omega}{e B_0} \quad (6-90)$$

Στην περίπτωση της γήινης ιονόσφαιρας, για μία συχνότητα $f=100$ MHz και μέ $B_0 = 0,5 \text{ Gauss} = 5 \times 10^{-5} \text{ Tesla}$, ο λόγος αυτός είναι περίπου 100.

Παρατηρήσεις

• Όταν στο σημείο της λήψης φτάνουν "ακτίνες" από διαφορετικές τροχιές (multipath) τότε το ολοκλήρωμα $\int_0^T NB_0 \cos \theta dl$ έχει διαφορετική τιμή για καθεμιά από αυτές.

Οι διαφορές αυτές στη στροφή Faraday τείνουν να "αποπολώσουν"

τό αρχικό κύμα, να μειώσουν δηλ. τό βαθμό πόλωσης του.

• Η στροφή Faraday είναι αντίστροφα ανάλογη μέ τό τετράγωνό της συχνότητας. Έτσι ένα κύμα πού δέν είναι μονοχρωματικό τείνει να αποπολωθεῖ.

• Οἱ δύο παραπάνω λόγοι αποπόλωσης α) από διάδοση σε άνομοιόγενές μέσο καί β) από " διαφορική στροφή Faraday " για τίς διαφορετικές συχνότητες ενός εύρους φάσματος, είναι ιδιαίτερα δραστικοί στη λήψη σημάτων της Ραδιοαστρονομίας.

Για να παρατηρήσουμε ἔστω καί μικρό βαθμό γραμμικής πόλωσης από πηγές μέ περιορισμένες γωνιακές διαστάσεις χρειάζονται δύο φροντίδες στα πειραματικά μέσα.

α) Μεγάλη αύξηση της κατευθυντικότητας της κεραίας, δηλ. περιορισμός της γωνιακής διασποράς των "άκτύνων" πού συγκεντρώνουμε καί

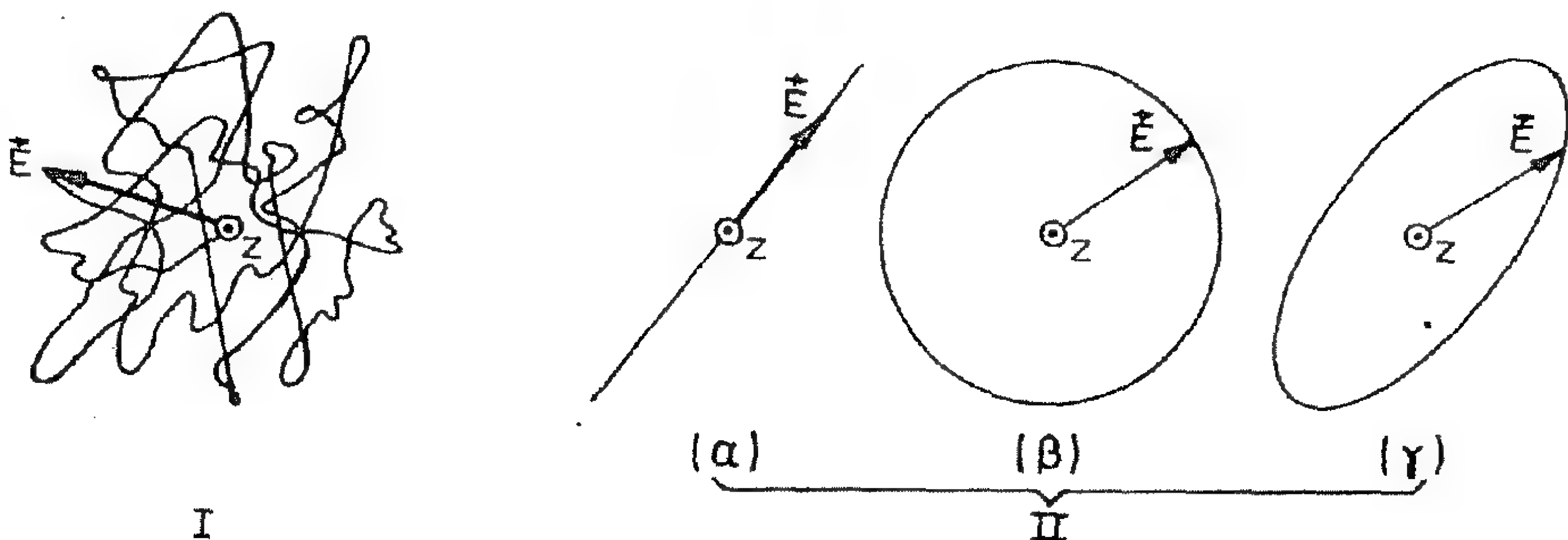
β) Μικρό εύρος ζώνης συχνοτήτων του δέκτη.

7. ΠΟΛΩΣΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ.

Στό Κεφάλαιο αυτό, αφού είσαχθεῖ ἡ ἔννοια τῆς πόλωσης, περιγράφεται τό ὅλικά πολωμένο Η.Μ. κύμα σάν ἐπαλληλῶς δύο γραμμικά πολωμένων κυμάτων, κάθετων μεταξύ τους, ἢ δύο κυκλικά πολωμένων κυμάτων μέ ἀντίστροφη πόλωση. Δύνονται οἱ παράμετροι τῆς πόλωσης, εἰσάγεται ἡ ἔννοια τοῦ μερικῶς πολωμένου κύματος καί ὁρίζονται οἱ παράμετροι τοῦ Stokes καί ἡ μήτρα συνεκτικότητας.

7.1. Ὅλικά Πολωμένο Κύμα.

Ἐς θεωρήσουμε ἓνα ἐπίπεδο ἡλεκτρομαγνητικό κύμα μέ διεύθυνση διαδόσεως κατά τόν ἄξονα Oz κάθετο στό ἐπίπεδο τοῦ χαρτιοῦ καί ἄς ἀσχοληθοῦμε μέ τήν ἡλεκτρική συνιστώσα του σ' ἓνα ὀρισμένο σημείο z (βλ. σχ. 7.1). Τό διάνυσμα \vec{E} θά βρῖσκεται κάθε χρονική στιγμή στό ἐπίπεδο τοῦ σχήματος καί τό ζήτημα πού μπαίνει εἶναι τί εἴδους γραμμή διαγράφει τό ἄκρο τοῦ \vec{E} στίς διάφορες χρονικές στιγμές.



Σχ. 7-1. I. Ἀπόλωτο κύμα, II. (α) Γραμμικά, (β) Κυκλικά, ἢ (γ) ἑλλειπτικά πολωμένο κύμα.

θά παραλείψουμε τόν ὅρο βz τῆς φασικῆς ἐξέλιξης τοῦ κύματος κατὰ τόν ἄξονα z (πού εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τοῦ χαρτιοῦ μας) καί θά θεωρήσουμε τή διάδοση τοῦ κύματος κατὰ τόν ἄξονα z, ὅποτε ἡ ἠλεκτρική συνιστώσα \vec{E} βρίσκεται στό ἐπίπεδο xy (βλ.σχ.7-2)

α. Περιγραφή μέ ἑπαλληλία "γραμμικά πολωμένων κυμάτων".

Οἱ συνιστώσες τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου στίς διευθύνσεις x , y εἶναι, ἀντίστοιχα :

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos \omega t \\ E_y &= E_{y0} \cos(\omega t + \delta) \end{aligned} \right\} \quad (7-1)$$

ὅπου δ εἶναι ἡ διαφορά φάσης τῶν δύο συνιστωσῶν.

Ὡστε εἶναι :

$$\vec{E} = \hat{x} E_x + \hat{y} E_y \quad (7-2)$$

"Αν OA εἶναι τό μήκος τοῦ μεγάλου ἡμιάξονα τῆς ἑλλειψῆς καί OB τό μήκος τοῦ μικροῦ, ὀρίζεται τό ἀξονικό πηλίκιο (ΑΠ) :

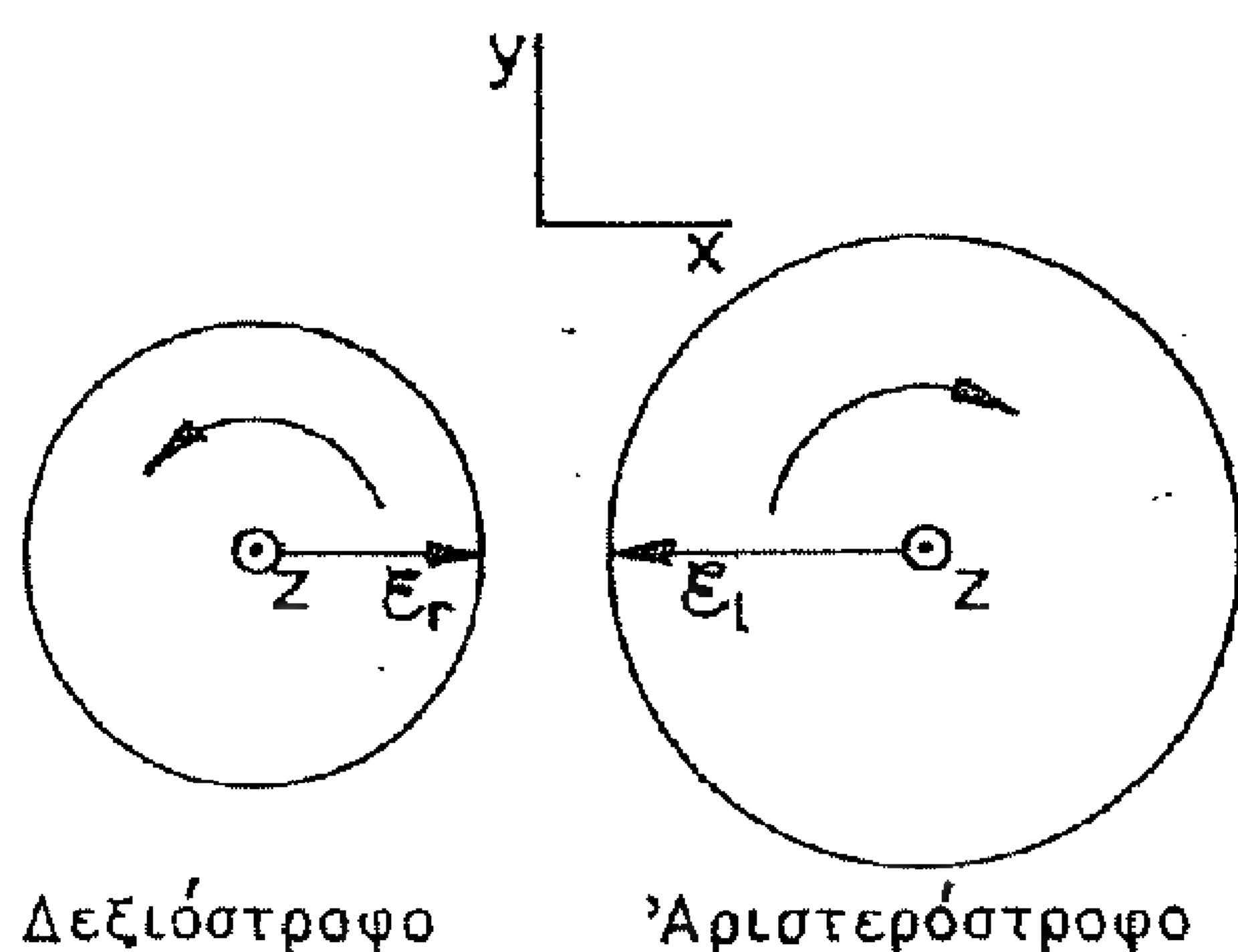
$$ΑΠ = \frac{OA}{OB}, \quad 1 \leq ΑΠ \leq \infty \quad (7-3)$$

β. Περιγραφή μέ ἑπαλληλία "κυκλικά πολωμένων κυμάτων".

Ἰσχύουν οἱ σχέσεις :

$$\left. \begin{aligned} E_r &= E_R e^{j\omega t} \\ E_l &= E_L e^{-j(\omega t + \delta')} \end{aligned} \right\} \quad (7-4)$$

Οἱ δύο προηγούμενες περιγραφές συνδέονται μεταξύ τους μέ τίς σχέσεις :



Σχ. 7-3. Δεξιόστροφο και Αριστερόστροφο κυκλικά πολωμένο κύμα.

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \operatorname{Re} [E_r + E_l] \\ E_y &= \operatorname{Im} [E_r + E_l] \end{aligned} \right\} \quad (7-5)$$

ή ακόμα :

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_R \cos \omega t + E_L \cos(\omega t + \delta') \\ E_y &= E_R \sin \omega t - E_L \sin(\omega t + \delta') \end{aligned} \right\} \quad (7-6)$$

Στό πύνακα της επόμενης σελίδας δίνονται οι παράμετροι γ, δ, ϵ και τ που εικονίζονται στο σχ. 7-2, οι σχέσεις που τις ορίζουν καθώς και οι τιμές που παίρνουν οι παράμετροι αυτές στις ειδικές περιπτώσεις της γραμμικής και της κυκλικής πόλωσης.

7.2. Η Σφαίρα του Poincaré.

Οι παράμετροι γ, δ, ϵ και τ , που ορίζονται στο πύνακα της επόμενης σελίδας συνδέονται με τις παρακάτω σχέσεις (Poincare 1892 Deschamps 1951).

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\gamma &= \cos 2\epsilon \cdot \cos 2\tau \\ \tan \delta &= \frac{\tan 2\epsilon}{\sin 2\tau} \end{aligned} \right\} \quad (7-7)$$

ή

$$\left. \begin{aligned} \tan 2\tau &= \tan 2\gamma \cos \delta \\ \sin 2\epsilon &= \sin 2\gamma \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (7-8)$$

Οι προηγούμενες τέσσερες σχέσεις επιτρέπουν το πέρασμα :

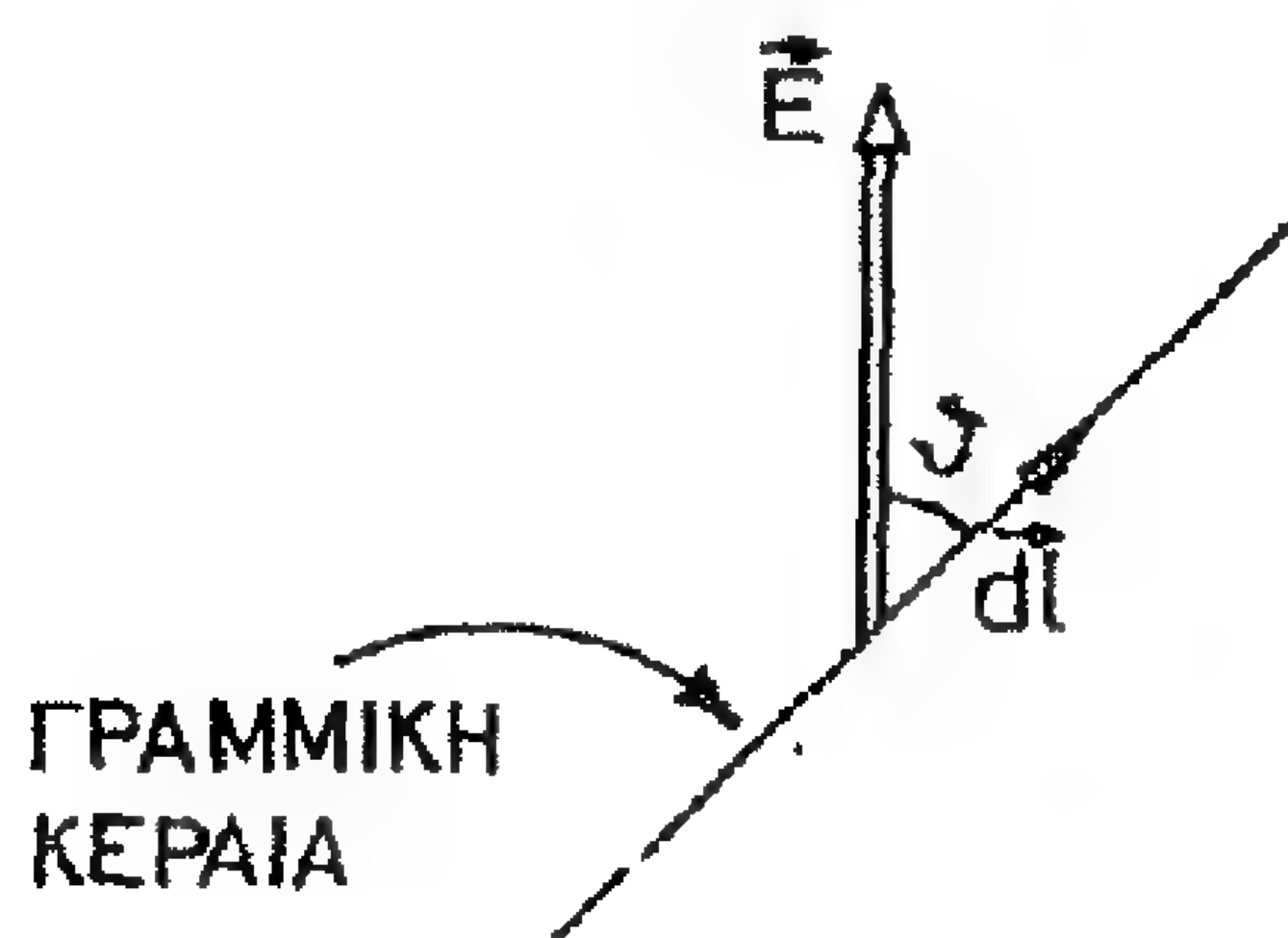
$$(\gamma, \delta) \iff (\epsilon, \tau)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 7-Ι

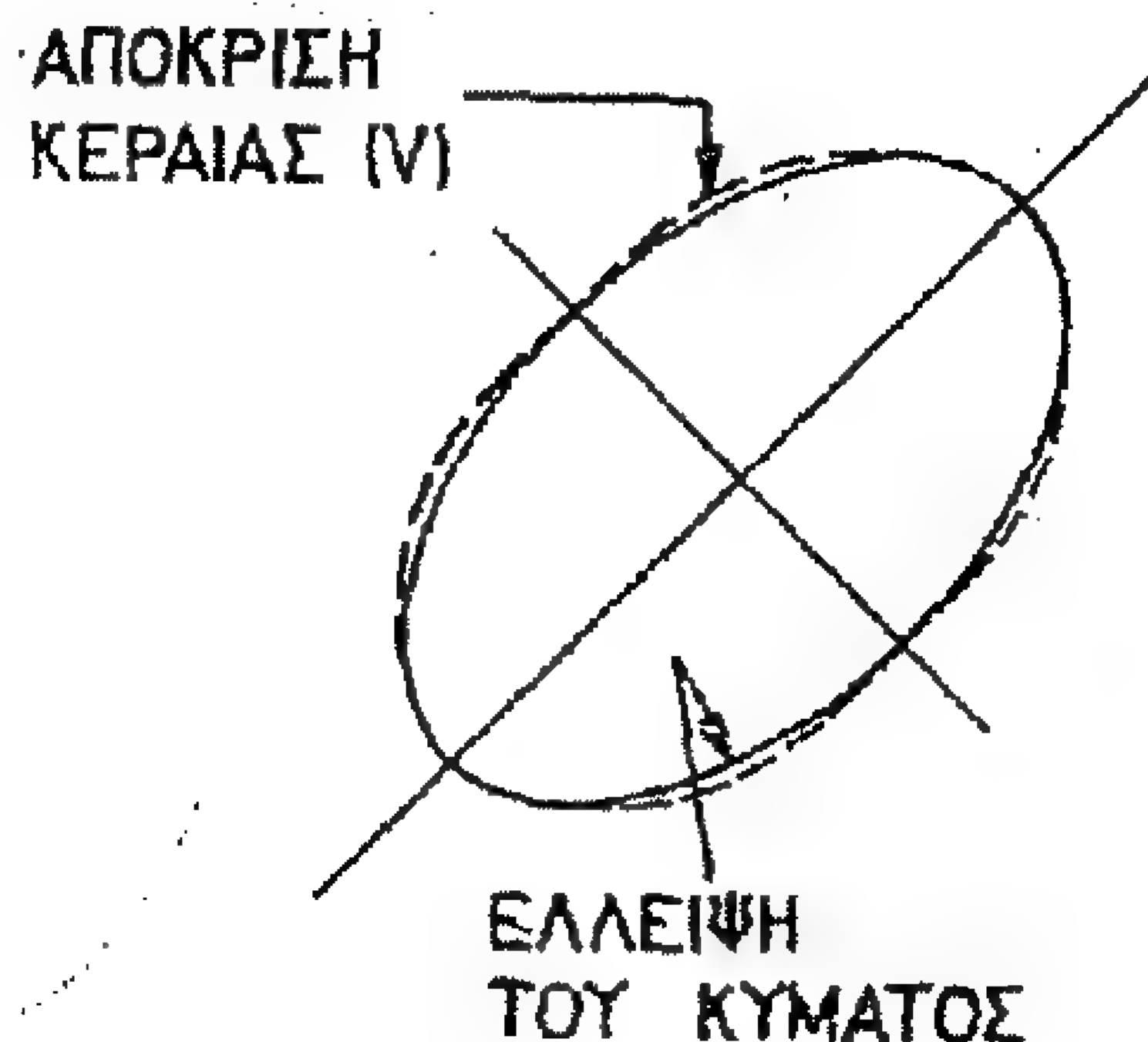
Παράμετροι τῆς Ἑλλειπτικῆς Πόλωσης

	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ	ΟΡΙΣΜΟΣ	ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	γ	$\gamma = \arctan \frac{E_{y0}}{E_{x0}}$ $0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$ <p>ὅπου E_{x0}, E_{y0} τὰ πλάτη τῆς ταλάντωσης στοὺς ἄξονες x καὶ y.</p>	<p>γραμμικὴ πόλωση</p> <p>ὁριζόντια: $\gamma = 0$</p> <p>κατακόρυφη: $\gamma = \frac{\pi}{2}$</p> <p>μέ γωνία α: $\gamma = \alpha$</p> <p>κυκλικὴ πόλωση: $\gamma = \frac{\pi}{4}$</p>
	δ	<p>Ἡ διαφορά φάσης τῆς συνιστώσας E_y ὡς πρὸς τὴν E_x: $E_y = E_x \tan \gamma e^{j\delta}$</p> $-\pi \leq \delta \leq +\pi$	<p>γραμμικὴ πόλωση: $\delta = 0$</p> <p>κυκλικὴ πόλωση</p> <p>δεξιόστροφη: $\delta = -\frac{\pi}{2}$</p> <p>ἀριστερόστροφη: $\delta = \frac{\pi}{2}$</p>
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	ϵ	$\epsilon = \operatorname{arccot} \mp A \Pi $ $-\frac{\pi}{4} \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{4}$ <p>ὅπου $A \Pi$ τὸ ἀξονικὸ πηλίκο: $A \Pi = \frac{OA}{OB}$</p>	<p>γραμμικὴ πόλωση ($A \Pi = \infty$)</p> <p>$\epsilon = 0$</p> <p>κυκλικὴ πόλωση ($A \Pi = 1$)</p> <p>δεξιόστροφη: $\epsilon = -\frac{\pi}{4}$</p> <p>ἀριστερόστροφη: $\epsilon = \frac{\pi}{4}$</p>
	τ	<p>Ἡ γωνία τοῦ μεγάλου ἄξονα τῆς ἑλλειψης μέ τον ἄξονα x (προσανατολισμός τῆς ἑλλειψης):</p> $0 \leq \tau \leq \pi$	<p>γιά γραμμικά πολωμένο κύμα μέ γωνία πόλωσης α εἶναι:</p> $\tau = \alpha = \gamma$

όπου l τό ενεργό μήκος τῆς κεραίας (βλ. σχ. 7-5)



Σχ. 7-5



Σχ. 7-6. Απόκριση γραμμικά πολωμένης κεραίας σέ έλλειπτικά πολωμένο κύμα

Στή γενική περίπτωση ενός έλλειπτικά πολωμένου κύματος τό πλάτος τοῦ \vec{E} εἶναι :

$$E_o = \sqrt{E_{xo}^2 + E_{yo}^2} \quad (7-11)$$

Αν στρέψουμε τήν κεραία ἀργά-ἀργά ἡ τάση V θά ἀλλάζει καί τελικά θά πάρουμε μιᾶ ἐξέλιξη διαφορετική ἀπό τήν ἔλλειψη τοῦ πολωμένου κύματος, ὅπως δείχνει τό σχ. 7-6 .

Αν $M_\alpha(\epsilon, \tau)$ εἶναι τό παραστατικό σημείο τῆς πόλωσης μιᾶς κεραίας, πάνω στή σφαῖρα τοῦ Poincare καί $M(\epsilon', \tau')$ τό ἀντίστοιχο σημείο τῆς πόλωσης τοῦ κύματος, τότε ἡ ἐπαγόμενη τάση εἶναι γενικά :

$$V = E I \cos \frac{\widehat{MM_\alpha}}{2} \quad (7-12)$$

Ἐφαρμογή :

Γιά $\widehat{MM_\alpha} = 0^\circ$ εἶναι $V = \max$ καί ἔχουμε προσαρμογή κεραίας-κύματος.

Γιά $\widehat{MM_\alpha} = 180^\circ$ τό $V=0$ (ὅπως π.χ. συμβαίνει (i) μέ κυκλική δεξιόστροφη κεραία καί κυκλικό ἀριστερόστροφο κύμα ἢ (ii) μέ κεραία ὀριζόντιας γραμμικῆς πόλωσης καί κύμα κατακόρυφα γραμμικά πολωμένο).

74. Μερικά Πολωμένο Κύμα.

Παράμετροι Stokes.

Ός εδώ εξετάσαμε τελείως (όλικά) πολωμένα Η.Μ. κύματα, δηλαδή κύματα όπου τά E_{x0} , E_{y0} και δ είναι σταθερά (ή τουλάχιστον μεταβάλλονται αργά με το χρόνο). Μια τέτοια περίπτωση είναι η ακτινοβολία ενός μονοχρωματικού πομπού. Συνήθως όμως, η έκπομπή από μια "φυσική" πηγή εκτείνεται σε σημαντικό εύρος ζώνης συχνοτήτων και μέσα σ' αυτό κάθε μικρό εύρος ΔF συνίσταται από την έπαλληλία ενός μεγάλου αριθμού στατιστικά ανεξάρτητων κυμάτων με ποικιλία πολώσεων. Το κύμα που προκύπτει λέγεται "τελείως απόλωτο κύμα".

Για ένα τέτοιο κύμα μπορούμε να γράψουμε :

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_{x0}(t) \cos \omega t \\ E_y &= E_{y0}(t) \cos [\omega t + \delta(t)] \end{aligned} \right\} \quad (7-13)$$

όπου όλες οι χρονικές συναρτήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Οι χρονικές μεταβολές $E_{x0}(t)$, $E_{y0}(t)$ και $\delta(t)$ είναι σχετικά αργές.

Ένα τέτοιο τελείως απόλωτο κύμα παίρνουμε όταν π.χ δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους "γεννήτριες θορύβου" τροφοδοτούν (α) δύο κάθετα μεταξύ τους δέπολα (και δημιουργούν δύο κάθετα γραμμικά πολωμένα τυχαία πεδία) ή (β) δύο έλικοειδείς κεραίες με αντίθετες σπείρες (δημιουργώντας έτσι δύο αντίστροφα κυκλικά πολωμένα τυχαία κύματα). Όπως θα δοῦμε όμως, για να προκύψει τελείως απόλωτο κύμα, θα πρέπει οι δύο γεννήτριες να ακτινοβολούν την ίδια μέση ισχύ και τά σήματά τους να είναι τελείως ασυσχέτιστα.

Μερικά πολωμένο κύμα : 'Η πιο γενική περίπτωση κύματος είναι εκείνη όπου το κύμα είναι "μερικά" πολωμένο, δηλαδή όταν μπορεί να θεωρηθεῖ ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη, τὸ ἓνα "τελείως πολωμένο" καὶ τὸ ἄλλο "τελείως ἀπόλωτο". Γιὰ τὴν περιγραφή ἑνὸς τέτοιου κύματος εἶναι ἀναγκαῖες οἱ τέσσερ-
ρες παράμετροι τοῦ Stokes (G. Stokes 1852, Chandrasekhar 1950)

Καταρχὴν ὀρίζουμε τὶς τέσσερις παραμέτρους τοῦ Stokes γιὰ τὴν περίπτωση τελείως πολωμένου κύματος.

7.4.1. Παράμετροι Stokes γιὰ ὀλικά πολωμένο κύμα.

Οἱ ἐξισώσεις (7-1) γράφονται :

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos(\omega t + \delta_1) \\ E_y &= E_{y0} \cos(\omega t + \delta_2) \end{aligned} \right\} \text{ με } \delta_2 - \delta_1 = \delta \quad (7-14)$$

Στὸ σύστημα τῶν ἀξόνων $x'y'$ τοῦ σχήματος 7-2 οἱ προβολές τοῦ \vec{E} θά εἶναι :

$$\left. \begin{aligned} E_{x'} &= E_0 \cos \epsilon \cos \omega t \\ E_{y'} &= E_0 \sin \epsilon \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (7-15)$$

καὶ μετὰ στροφὴ τῶν ἀξόνων ἀπὸ τοῦ $x'y'$ στοὺς xy :

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_{x'} \cos \tau - E_{y'} \sin \tau \\ E_y &= E_{x'} \sin \tau + E_{y'} \cos \tau \end{aligned} \right\} \quad (7-16)$$

Ἀπὸ τὶς (7-15) καὶ (7-16) μετὰ ἀπαλοιφή τῶν $E_{x'}$ καὶ $E_{y'}$ προκύπτουν :

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_0 (\cos \epsilon \cos \tau \cos \omega t - \sin \epsilon \sin \tau \sin \omega t) \\ E_y &= E_0 (\cos \epsilon \sin \tau \cos \omega t + \sin \epsilon \cos \tau \sin \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (7-17)$$

Απαλείφοντας τὰ $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ από τῆς (7-14) καί (7-17) παίρνουμε :

$$\left. \begin{aligned} E_{x0} &= E_0 \sqrt{\cos^2 \epsilon \cos^2 \tau + \sin^2 \epsilon \sin^2 \tau} \\ E_{y0} &= E_0 \sqrt{\cos^2 \epsilon \sin^2 \tau + \sin^2 \epsilon \cos^2 \tau} \end{aligned} \right\} \quad (7-18)$$

Από τῆς (7-18) προκύπτει εύκολα ὅτι :

$$E_{x0}^2 + E_{y0}^2 = E_0^2 \quad (7-19)$$

Ἄν S_x εἶναι τό πλάτος τοῦ διανύσματος Poynting^{*)} τῆς πολωμένης κατά τόν ἄξονα x συνιστώσας καί S_y τό ἀντίστοιχο πλάτος τῆς πολωμένης κατά τόν ἄξονα y συνιστώσας, ὁρίζεται τό μέγεθος :

$$S = S_x + S_y = \frac{E_{x0}^2 + E_{y0}^2}{Z} = \frac{E_0^2}{Z} \quad (7-20)$$

Από τῆς (7-18) καί (7-20) προκύπτουν :

$$\boxed{\begin{aligned} S_x &= \frac{E_{x0}^2}{Z} = S (\cos^2 \epsilon \cos^2 \tau + \sin^2 \epsilon \sin^2 \tau) \\ S_y &= \frac{E_{y0}^2}{Z} = S (\cos^2 \epsilon \sin^2 \tau + \sin^2 \epsilon \cos^2 \tau) \end{aligned}} \quad (7-21)$$

Οἱ παράμετροι I , Q , U καί V τοῦ Stokes γιά ἓνα ὀλικά πολωμένο κύμα μέ τά στοιχεῖα S_x ,

*) Θυμίζουμε ὅτι ἐπειδή τό διάνυσμα Poynting εἶναι $\vec{P} \triangleq \vec{E} \times \vec{H}$ καί ἡ κυματική ἀντίσταση τοῦ μέσου διαδόσεως εἶναι $Z \triangleq \frac{E}{H}$ ἔχουμε ὅτι $P = \frac{E^2}{Z}$. Στό κεφάλαιο αὐτό ἀντὶ τοῦ συμβόλου P χρησιμοποιοῦμε τό σύμβολο S ὅπως συνηθίζεται στή σχετική μέ τήν πόλωση βιβλιογραφία.

S_y , ϵ , τ ορίζονται ως εξής :

$$I \triangleq S = S_x + S_y = \frac{E_{x0}^2}{Z} + \frac{E_{y0}^2}{Z}$$

$$Q \triangleq S_x - S_y = \frac{E_{x0}^2}{Z} - \frac{E_{y0}^2}{Z} = S \cos 2\epsilon \cos 2\tau$$

$$U \triangleq (S_x - S_y) \tan 2\tau = S \cos 2\epsilon \sin 2\tau = 2 \frac{E_{x0} E_{y0}}{Z} \cos \delta$$

$$V \triangleq (S_x - S_y) \tan 2\epsilon \sec 2\tau = S \sin 2\epsilon = 2 \frac{E_{x0} E_{y0}}{Z} \sin \delta$$

(7-22)

όπου $\delta = \delta_2 - \delta_1$.

(Μιά μνημοτεχνική παρατήρηση : Οί παράμετροι του Stokes θά μπορούσαν νά θεωρηθοῦν σάν ἄθροισμα, διαφορά, βατική καί ἀβατική συνιστώσα ισχύος) .

Από τίς (7-22) προκύπτουν οί σχέσεις :

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2 \quad (7-23)$$

$$\frac{U}{Q} = \tan 2\tau \quad (7-24)$$

καί
$$\frac{V}{S} = \sin 2\epsilon = \frac{V}{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}} \quad (7-25)$$

Χρησιμοποιώντας τό συμβολισμό μέ μήτρα-στήλη ορίζουμε τό " διάνυσμα του Stokes " :

$$[S_i] \triangleq \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ S \cos 2\epsilon \cos 2\tau \\ S \cos 2\epsilon \sin 2\tau \\ S \sin 2\epsilon \end{bmatrix} \quad (7-26)$$

Αν διαιρέσουμε τις παραμέτρους του Stokes, που όρισαμε, διά S προκύπτουν οι κανονικοποιημένες παράμετροι του Stokes (ή άνηγμένες, normalized) και αντίστοιχα το κανονικοποιημένο διάνυσμα του Stokes :

$$[s_i] \triangleq \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{S} \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \frac{1}{S} [S_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\epsilon \cos 2\tau \\ \cos 2\epsilon \sin 2\tau \\ \sin 2\epsilon \end{bmatrix} \quad (7-27)$$

Εφαρμογή σε τρεις ειδικές περιπτώσεις

- 1) Για άριστερόστροφο κυκλικά πολωμένο κύμα είναι, $S_x = S_y$,
 $A \Pi = 1$ και $\epsilon = 45^\circ$, $\tau = \text{άπροσδιόριστο}$.

Ωστε από τις (7-26) και (7-27) έχουμε :

$$[s_i] \triangleq \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ 0 \\ 0 \\ S \end{bmatrix}, \quad [s_i] \equiv \frac{1}{S} \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7-28)$$

- 2) Για δεξιόστροφο κυκλικά πολωμένο κύμα, όπου είναι $S_x = S_y$,
 $A \Pi = 1$, $\epsilon = -45^\circ$ και $\tau = \text{άπροσδιόριστο}$. Προκύπτει:

$$[s_i] \triangleq \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ 0 \\ 0 \\ -S \end{bmatrix}, \quad [s_i] \equiv \frac{1}{S} \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (7-29)$$

3) Για γραμμικά πολωμένο κύμα, μέ γωνία πόλωσης α , όπου είναι:

$\gamma = \alpha$, $\delta = 0$, $\tau = \alpha$, $\epsilon = 0$, προκύπτει :

$$\begin{bmatrix} S_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ S \cos 2\alpha \\ S \sin 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} S_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-30)$$

7.4.2. Οί Παράμετροι του Stokes για μερικά πολωμένο και για τελείως απόλωτο κύμα.

Στήν περίπτωση αυτή ξαναγράφουμε τις (7-14) ως εξής :

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_{x0}(t) \cos[\omega t + \delta_1(t)] \\ E_y &= E_{y0}(t) \cos[\omega t + \delta_2(t)] \end{aligned} \right\} \quad (7-31)$$

$$\text{όπου} \quad \delta = \delta_2 - \delta_1 \quad (7-32)$$

Για τόν όρισμό, τώρα, των I, Q, U και V είναι ανάγκη να πάρουμε τη χρονική μέση τιμή των συναρτήσεων $E_{x0}(t)$, $E_{y0}(t)$, $\delta_1(t)$ και $\delta_2(t)$. Συμβολίζοντας τόν τελεστή της μέσης τιμής :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \dots dt \quad \text{μέ} \quad \langle \dots \rangle \quad (7-33)$$

έντελως ανάλογα μέ τις (7-22) όρίζουμε :

$$I \triangleq S = S_x + S_y = \frac{\langle E_{x0}^2 \rangle}{Z} + \frac{\langle E_{y0}^2 \rangle}{Z}$$

$$Q \triangleq S_x - S_y = \frac{\langle E_{x0}^2 \rangle}{Z} - \frac{\langle E_{y0}^2 \rangle}{Z} = S \langle \cos 2\epsilon \cos 2\tau \rangle$$

(7-34)

$$U \triangleq S \langle \cos 2\epsilon \sin 2\tau \rangle = \frac{2}{Z} \langle E_{x0} E_{y0} \cos \delta \rangle$$

$$V \triangleq S \langle \sin 2\epsilon \rangle = \frac{2}{Z} \langle E_{x0} E_{y0} \sin \delta \rangle$$

$$\text{όπου } \delta = \delta_2 - \delta_1$$

Πρέπει νά τονιστεῖ ὅτι στίς παραπάνω σχέσεις τά ϵ , τ , δ , E_{x0} , E_{y0} εἶναι τώρα συναρτήσεις τοῦ χρόνου.

Ἀπό τίς (7-34) χρησιμοποιώντας τή σχέση :

$$\langle x^2 \rangle \geq \langle x \rangle^2 \quad (7-35)$$

προκύπτει ὅτι :

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2 \quad (7-36)$$

Ἀπό τίς (7-22) καί (7-34) φαίνεται ὅτι μόνο ἡ παράμετρος I ἐκφράζει τήν ὅλη ἰσχύ, ἐνῶ οἱ παράμετροι Q , U καί V περιέχουν χαρακτηριστικά μόνο τῆς πολωμένης ἰσχύος.

Ἐφαρμογή στό τελείως ἀπόλωτο κύμα :

Στήν εἰδική περίπτωση τοῦ τελείως ἀπόλωτου κύματος ἔχουμε $S_x = S_y$, ἐνῶ τά $E_{x0}(t)$, $E_{y0}(t)$ εἶναι τελείως ἀσυσχέτιστα καί ἐπομένως εἶναι $\langle E_{x0}(t) E_{y0}(t) \cos \delta \rangle = 0$ καί $\langle E_{x0}(t) E_{y0}(t) \sin \delta \rangle = 0$. Ὡστε γιά τελείως ἀπόλωτο κύμα εἶναι :

$$\begin{bmatrix} S \\ s_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad \begin{bmatrix} S \\ s_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-37)$$

Ορίζουμε σαν βαθμό πόλωσης το πηλύκο :

$d \triangleq \frac{\text{πολωμένη ισχύς}}{\text{όλική ισχύς}} = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I}$	ΒΑΘΜΟΣ ΠΟΛΩΣΗΣ	(7-38)
--	-------------------	--------

καί είναι : $0 \leq d \leq 1$ (7-39)

Διαπιστώνουμε από την (7-38) ότι αν κάποιο από τα Q, U και V είναι διάφορο από το μηδέν τότε υπάρχει πολωμένη συνιστώσα ισχύος. Ωστε η συνθήκη $Q = U = V = 0$ είναι αναγκαία και αρκετή για να έχουμε τελείως απόλωτο κύμα. Ο βαθμός πόλωσης d είναι μηδέν για το τελείως απόλωτο κύμα και μονάδα για το τελείως πολωμένο.

Δύο βασικές προτάσεις που μπορούν ν' αποδειχτούν είναι :

- Δύο κύματα με τις ίδιες παραμέτρους Stokes "ταυτίζονται".
- Στην περίπτωση, που έχουμε έπαλληλία διάφορων ανεξάρτητων κυμάτων, οι παράμετροι Stokes του συνιστάμενου κύματος θα είναι το άθροισμα των παραμέτρων Stokes των επιμέρους κυμάτων.

Η παρουσία της απόλωτης συνιστώσας μπορεί να αναδειχτεί, αν ξαναεκφράσουμε τις παραμέτρους του Stokes με τη βοήθεια των δύο συνιστωσών: της πολωμένης S_p (polarized) και της απόλωτης S_u (unpolarized). Έτσι θα έχουμε :

$$\begin{aligned}
 I &= S_u + S_p = S_u + S_{xp} + S_{yp} \\
 Q &= S_{xp} - S_{yp} \\
 U &= (S_{xp} - S_{yp}) \tan 2\tau \\
 V &= (S_{xp} - S_{yp}) \tan 2\epsilon \sec 2\tau
 \end{aligned}
 \tag{7-40}$$

Οι κανονικοποιημένες παράμετροι Stokes του μερικά πολωμένου κύματος είναι :

$$\begin{aligned}
 s_0 &= \frac{I}{S} = 1 \\
 s_1 &= \frac{Q}{S} = \frac{S_x - S_y}{S} = \langle \cos 2\epsilon \cos 2\tau \rangle \\
 s_2 &= \frac{U}{S} = \frac{2}{Z} \frac{\langle E_{x0} E_{y0} \cos \delta \rangle}{S} = \langle \cos 2\epsilon \sin 2\tau \rangle \\
 s_3 &= \frac{V}{S} = \frac{2}{Z} \frac{\langle E_{x0} E_{y0} \sin \delta \rangle}{S} = \langle \sin 2\epsilon \rangle
 \end{aligned}
 \tag{7-41}$$

Τό διάνυσμα Stokes και τό κανονικοποιημένο διάνυσμα Stokes για τό μερικά πολωμένο κύμα είναι :

$$\begin{bmatrix} S \\ S \langle \cos 2\epsilon \cos 2\tau \rangle \\ S \langle \cos 2\epsilon \sin 2\tau \rangle \\ S \langle \sin 2\epsilon \rangle \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \langle \cos 2\epsilon \cos 2\tau \rangle \\ \langle \cos 2\epsilon \sin 2\tau \rangle \\ \langle \sin 2\epsilon \rangle \end{bmatrix}
 \tag{7-42}$$

"Αν d ο βαθμός πόλωσης και ϵ και τ τά χαρακτηριστικά πόλωσης της πολωμένης ισχύος μπορούν να αποδειχτούν οι σχέσεις :

$$\left. \begin{aligned}
 \langle \cos 2\epsilon \cos 2\tau \rangle &= d \cos 2\epsilon \cos 2\tau \\
 \langle \cos 2\epsilon \sin 2\tau \rangle &= d \cos 2\epsilon \sin 2\tau \\
 \langle \sin 2\epsilon \rangle &= d \sin 2\epsilon
 \end{aligned} \right\} \quad (7-43)$$

Όστε οι (7-42) γίνονται :

$$[S_i] = \begin{bmatrix} S \\ Sd \cos 2\epsilon \cos 2\tau \\ Sd \cos 2\epsilon \sin 2\tau \\ Sd \sin 2\epsilon \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad [S_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ d \cos 2\epsilon \cos 2\tau \\ d \cos 2\epsilon \sin 2\tau \\ d \sin 2\epsilon \end{bmatrix} \quad (7-44)$$

Από τή σύγκριση τῶν (7-42) καί (7-44) παρατηροῦμε πῶς τή θέση τοῦ τελεστή τῆς μέσης τιμῆς τῶν (7-42) τήν παίρνει στίς (7-44) ὁ βαθμός πόλωσης d .

Από τίς (7-44) μπορούμε νά γράψοῦμε :

$$[S_i] = \underbrace{S \begin{bmatrix} 1-d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{τελείως ἀπόλωτο}} + \underbrace{S \begin{bmatrix} d \\ d \cos 2\epsilon \cos 2\tau \\ d \cos 2\epsilon \sin 2\tau \\ d \sin 2\epsilon \end{bmatrix}}_{\text{τελείως πολωμένο}} \quad (7-45)$$

$$\text{καί} \quad [S_i] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{τελείως ἀπόλωτο}} + \underbrace{\begin{bmatrix} d \\ d \cos 2\epsilon \cos 2\tau \\ d \cos 2\epsilon \sin 2\tau \\ d \sin 2\epsilon \end{bmatrix}}_{\text{τελείως πολωμένο}} \quad (7-46)$$

Ωστε, ένα μερικά πολωμένο κύμα μπορούμε νά τό μεταχειριστοῦμε σάν ἄθροισμα ἑνός τελείως ἀπόλωτου κι ἑνός τελείως πολωμένου.

Ὁ βαθμός πόλωσης d (βλ. σχέση (7-38)) μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τίς κανόνικοποιημένες παραμέτρους τοῦ Stokes, πού τίς παίρνουμε ἀπό τήν (7-44) :

$$d \triangleq \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I} = \frac{S \sqrt{\left(\frac{Q}{S}\right)^2 + \left(\frac{U}{S}\right)^2 + \left(\frac{V}{S}\right)^2}}{S} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \quad (7-47)$$

Ἀπό ὅλα τά παραπάνω φτάνουμε στό συμπέρασμα ὅτι γιά νά ξέρουμε τά χαρακτηριστικά ἑνός μερικά πολωμένου κύματος ἄρκει νά δύνονται ὁ βαθμός πόλωσης τοῦ d , πού δείχνει πόσο κλάσμα τῆς ὅλικῆς ἰσχύος εἶναι πολωμένο καί τό σημεῖο (ϵ, τ) τῆς σφαίρας τοῦ Poincaré, πού περιγράφει τήν ὅλικά πολωμένη συνιστώσα.

Ὡς ἐδῶ ὅλη ἡ περιγραφή ἔγινε μέ τίς γραμμικά πολωμένες συνιστώσες. Μιά ἀνάλογη περιγραφή μέ τίς κυκλικά πολωμένες συνιστώσες ἔδωσε ὁ Cohen (1958), πού ἔδειξε ὅτι γιά ὅλική πόλωση εἶναι :

$$A\Pi = \frac{E_L + E_R}{E_L - E_R} = \cot \epsilon \quad \text{καί} \quad \delta' = 2\tau \quad (7-48)$$

Οἱ παράμετροι τοῦ Stokes γιά ἕνα μερικά πολωμένο κύμα, στήν περιγραφή αὐτή, εἶναι :

$$\begin{aligned} I &= S_L + S_R = S = \frac{\langle E_L^2 \rangle}{Z} + \frac{\langle E_R^2 \rangle}{Z} \\ Q &= \frac{2\langle E_L E_R \cos \delta' \rangle}{Z} \\ U &= \frac{2\langle E_L E_R \sin \delta' \rangle}{Z} \\ V &= S_L - S_R = \frac{\langle E_L^2 \rangle}{Z} - \frac{\langle E_R^2 \rangle}{Z} \end{aligned} \quad (7-49)$$

7.5. Παραστατική Μήτρα Πόλωσης μιᾶς Κεραίας — Απόκριση Κεραίας σέ Μερικά ἢ Ὀλικά Πολω- μένο Κύμα.

Πρῶτος ὁ Κο (1962) πρότεινε τὴν περιγραφή τῶν χαρακτηρι-
κῶν πόλωσης μιᾶς κεραίας (εὔτε γιὰ λήψη εὔτε γιὰ ἐκπομπή) μέ τή
βοήθεια μιᾶς μήτρας στήλης $[a_i]$ ἀνάλογης μέ τή μήτρα-στήλη (διά-
νυσμα) τοῦ Stokes $[S_i]$. Ἄν A εἶναι τό ἐνεργό ἄνοιγμα μιᾶς
κεραίας λήψης τότε τά χαρακτηριστικά πόλωσής της θά δύνονται ἀ-
πό τή μήτρα :

$$A[a_i] = A \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (\sigma\acute{\epsilon} \text{ m}^2) \quad (7-50)$$

ὅπου a_0 , a_1 , a_2 καί a_3 εἶναι οἱ κανονικοποιημένες παράμετροι
τοῦ Stokes, πού θά ἀκτινοβολοῦσε ἡ κεραία σάν κεραία ἐκπομπῆς.
Βάζοντας, λοιπόν, τό δείκτη t (transmitting), γιὰ νά δηλώσουμε
τὴν ἐκπομπή τοῦ κύματος, θά ἔχουμε :

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= \cos 2\epsilon_t \cos 2\tau_t \\ a_2 &= \cos 2\epsilon_t \sin 2\tau_t \\ a_3 &= \sin 2\epsilon_t \end{aligned} \right\} \quad (7-51)$$

Ὁ Κο ἀπόδειξε ἰδιαίτερα ὅτι ἡ διαθέσιμη ἰσχύς N , ὅταν μέ τὴν κε-
ραία αὐτή ἐπιχειροῦμε τή λήψη ἑνός μερικᾶ ἢ ὀλικά πολωμένου κύ-

ματος με χαρακτηριστικά πόλωσης $[S_i] = S [s_i]$, δίνεται από τη σχέση:

$$N = \frac{1}{2} SA [\widetilde{\alpha_i}] [s_i] = \frac{1}{2} SA \sum_{i=0}^3 \alpha_i s_i \quad (7-52)$$

όπου $[\widetilde{\alpha_i}]$ η ανάστροφη (ή ανάμορφη) μήτρα της $[\alpha_i]$ (transpose) .

Έτσι λοιπόν :

$$N = \frac{1}{2} SA [\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3] \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} SA (\alpha_0 s_0 + \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3) \quad (7-53)$$

πού μπορεί να διατυπωθεῖ καὶ σάν :

$$N = \frac{1}{2} SA (1 + d \cos \widehat{MM}_\alpha) = \frac{1}{2} SA (1 - d) + dSA \cos^2 \frac{\widehat{MM}_\alpha}{2} \quad (7-54)$$

όπου, όπως ξέρουμε, \widehat{MM}_α είναι η γωνιακή απόσταση των παραστατικών σημείων κύματος καὶ κεραίας πάνω στη σφαῖρα τοῦ Poincaré .

Στήν ειδική περίπτωση τελείως πολωμένου κύματος ($d = 1$) ἡ (7-54) ταυτίζεται με τήν (7-12)-μέ μόνη τή διαφορά ὅτι ἡ (7-12) ἀφορᾷ τήν τάση καὶ ὅχι τήν ἰσχύ (γι αὐτό τό λόγο ὑπάρχει τό τετράγωνο)- .

Ἀπό τήν (7-54) προκύπτουν τά ἑξῆς σημαντικά συμπεράσματα :

(α) Στήν κεραία παίρνουμε μόνο τό μισό τῆς ἀπόλυτης ἰσχύος τοῦ κύματος καὶ μάλιστα ἀνεξάρτητα ἀπό τήν προσαρμογή κεραίας - κύματος .

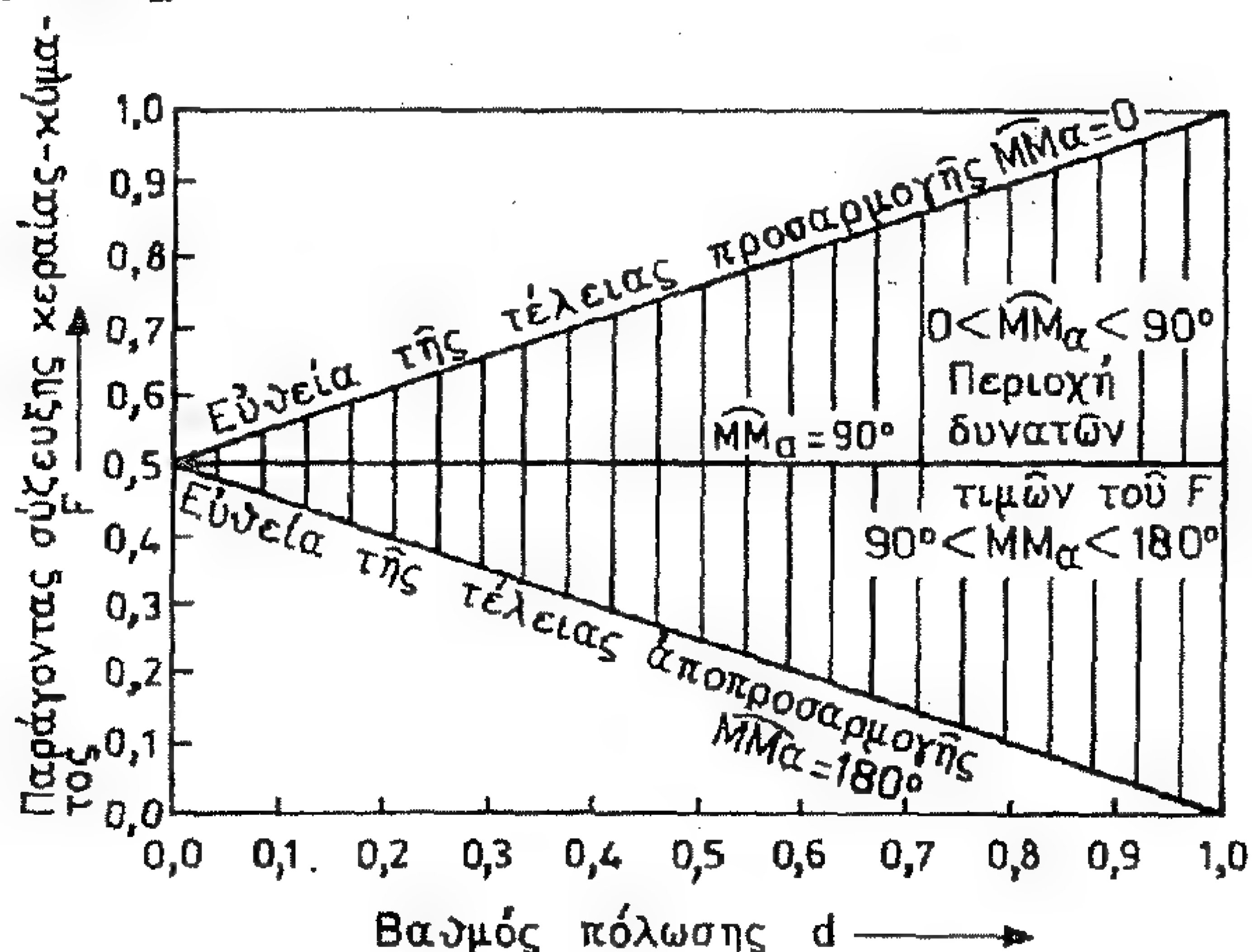
(β) Ἀντίθετα ὅλο τό πολωμένο μέρος τῆς ἰσχύος εἶναι διαθέσιμο γιὰ τήν κεραία ἡ λήψη του ὅμως ἐπιτυγχάνεται μόνο στήν περίπτωση τέλει προσαρμογῆς κεραίας-κύματος (δηλ. γιὰ $\widehat{MM}_\alpha = 0$)

(γ) Για τή γενικότερη διερεύνηση τής προσαρμογής κεραίας- κύματος ή (7-54) γράφεται καί :

$$P = \left(\frac{1-d}{2} + d \cos^2 \frac{\widehat{MM}_\alpha}{2} \right) AS = FAS \quad (7-55)$$

όπου F είναι ο παράγοντας, πού βρίσκεται μέσα στην παρένθεση. Ο F μπορεί νά ονομαστεί παράγοντας σύζευξης κεραίας- κύματος. Ο παράγοντας F εκφράζει πόσο κλάσμα τής μέγιστης διαθέσιμης ισχύος AS λαβαίνει ή κεραία.

Η γραφική παράσταση του παράγοντα σύζευξης κεραίας- κύματος (F), σέ συνάρτηση μέ τό βαθμό πόλωσης (d) είναι μία εύθεια γραμμή, γιά κάθε τιμή τής γωνιακής απόστασης \widehat{MM}_α τών καταστάσεων πόλωσης κεραίας - κύματος (βλ. σχ. 7-7). Όλες αυτές οί εύθειες γραμμές περιέχονται μέσα στό τρίγωνο πού σχηματίζουν ή εύθεια τής τέλειας προσαρμογής ($\widehat{MM}_\alpha = 0^\circ$) καί ή εύθεια τής τέλειας αποπροσαρμογής ($\widehat{MM}_\alpha = 180^\circ$).



Σχ. 7-7. Γραφική παράσταση τής σχέσης $F=F(d)$, γιά $\widehat{MM}_\alpha = \text{σταθ.}$ ή $F(d)$ είναι εύθεια γραμμή.

7.6. Γενίκευση τῆς Περιγραφῆς μέ Μῆτρες.

"Αν ἀπό τὰ S_i ὀρίσουμε τέσσερις ἄλλες παραμέτρους S_{ij} ὡς ἑξῆς :

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{2} (S_0 + S_1) \\ S_{12} &= \frac{1}{2} (S_2 + jS_3) \\ S_{21} &= \frac{1}{2} (S_2 - jS_3) \\ S_{22} &= \frac{1}{2} (S_0 - S_1) \end{aligned} \right\} \quad (7-56)$$

καί, ἀνάλογα, ἄλλες τέσσερις παραμέτρους α_{11} , α_{12} , α_{21} καί α_{22} γιά τήν κεραία καί χρησιμοποιήσουμε τίς νέες παραμέτρους σάν στοιχεῖα μητρῶν 2×2 , μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ διαθέσιμη ἰσχύς στήν κεραία, στή γενική περίπτωση πόλωσης, δίνεται ἀπό τήν σχέση :

$$N = T_r \left\{ SA \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \right\} \quad (7-57)$$

ὅπου μέ T_r δηλώνουμε τό ἔχνος (trace) τῆς μήτρας δηλ. τό ἄθροισμα τῶν διαγώνιων ὀρων τῆς. Ἡ (7-57) γράφεται καί :

$$N = AS (\alpha_{11}S_{11} + \alpha_{22}S_{22} + \alpha_{33}S_{33})$$

$$\text{ἢ } \boxed{N = AS T_r \{ [\alpha_{ij}] [S_{ij}] \} = ASF} \quad (7-58)$$

Σύμφωνα μέ τή σχέση αὐτή ἡ ἀπόκριση N τοῦ συστήματος δίνεται ἀπό τό ἔχνος τῆς μήτρας πού προκύπτει ὡς γινόμενο τῆς μήτρας $A[\alpha_{ij}]$ τοῦ συστήματος λήψης (κεραία καί δέκτης) ἐπὶ τή μή-

τρα $S[s_{ij}]$ του κύματος. Η σχέση αυτή έχει γενικότερη ισχύ σε όλη την οπτική, όπου οι μήτρες της (7-58) λέγονται *μ ή τ ρ ε σ σ υ ν ε κ τ ι κ ό τ η τ α ς* (coherency matrices).

Στόν Πίνακα που ακολουθεῖ δύνονται οι κανονικοποιημένες παράμετροι Stokes και οι αντίστοιχες μήτρες συνεκτικότητας για μερικές ειδικές περιπτώσεις κυμάτων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7-Π

Τύπος Κύματος	Κανονικοποιημένο Διάνυσμα Stokes	Μήτρα Συνεκτικότητας
Τελείως απόλωτο	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Δεξιόστροφο κυκλικό	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix}$
Άριστερόστροφο κυκλικό	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix}$
Γραμμικά πολωμένο μέ γωνία πόλωσης α ($\tau=\alpha$)	$\begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & 1-\cos 2\alpha \end{bmatrix}$
Μερικά ($d=\frac{1}{3}$) γραμμικά πολωμένο μέ $\tau=\alpha=45^\circ$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix}$

Η μήτρα συνεκτικότητας ενός κύματος, πού προκύπτει σέ ένα σημείο από τήν έπαλληλία διάφορων άνεξάρτητων κυμάτων, πού διαδίδονται κατά τήν ίδια διεύθυνση, θά είναι ίση μέ τό άθροισμα τών μητρών συνεκτικότητας τών έπιμέρους κυμάτων στό σημείο αυτό. Κι αντίστροφα, μπορούμε νά αναλύσουμε ένα κύμα σέ έπιμέρους συνιστώσες μέ κατάλληλες πολώσεις. Για ένα τελείως απόλωτο κύμα μπορούμε νά γράψουμε λόγω χάρη :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7-59)$$

πού σημαίνει πώς μπορεί νά θεωρηθεῖ ότι προκύπτει από ένα γραμμικά πολωμένο κύμα μέ $\alpha = \tau = 0^\circ$ κι ένα άλλο γραμμικά πολωμένο μέ $\alpha = \tau = 90^\circ$. Έτσι τό τελείως απόλωτο κύμα μπορεί νά προκύψει ως άθροισμα δύο άνεξάρτητων τελείως γραμμικά πολωμένων κυμάτων ($\epsilon = 0$), πού έχουν τήν ίδια ένταση καί μέ τά χαρακτηριστικά τους επίπεδα κάθετα μεταξύ τους, όπως ήδη αναφέρθηκε.

Έντελως αντίστοιχα, τό απόλωτο κύμα μπορεί νά γραφεί :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix} \quad (7-60)$$

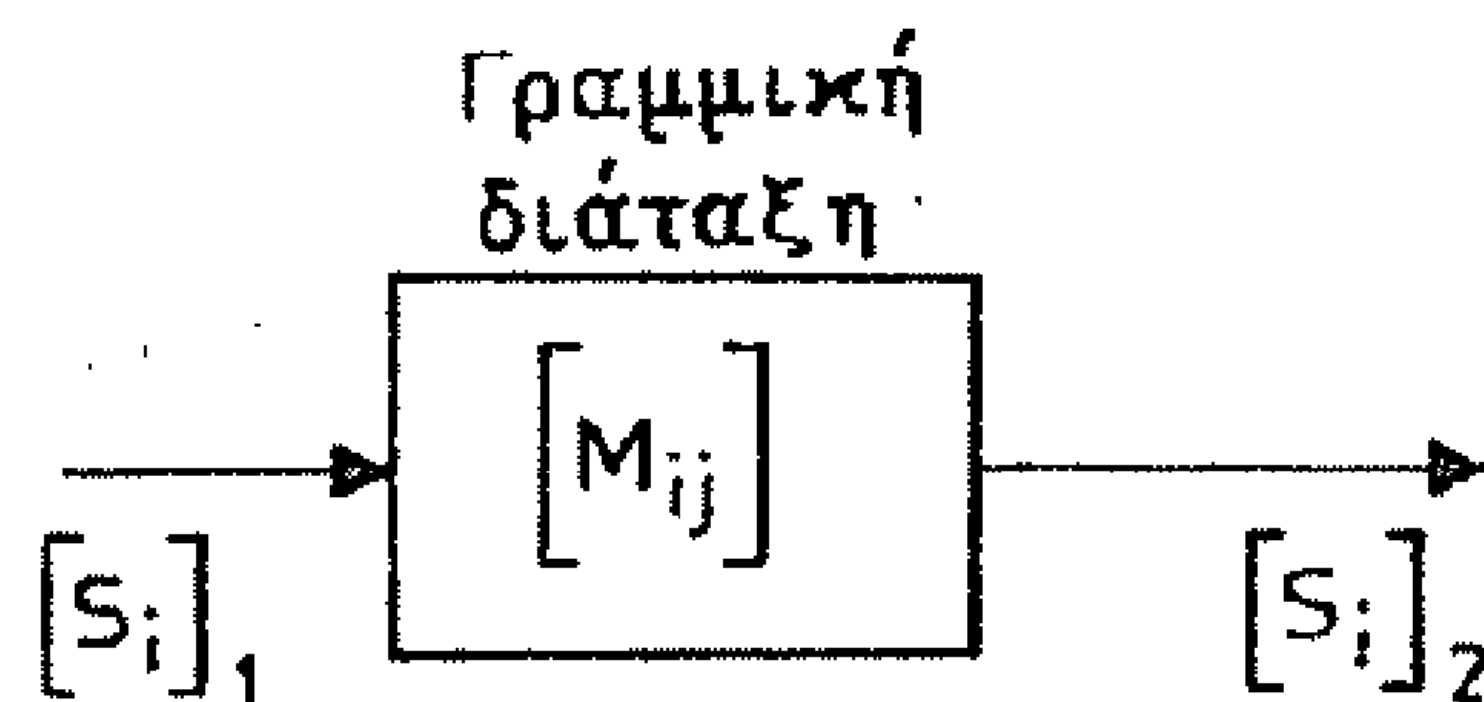
δηλαδή σάν άθροισμα δύο τελείως κυκλικά πολωμένων άνεξάρτητων κυμάτων, μέ αντίστροφη πολικότητα (L καί R) καί τήν ίδια ένταση.

Μέ τόν ίδιο τρόπο θά μπορούσαμε νά εργαστοῦμε μέ τά διανύσματα τοῦ Stokes, π.χ. για τελείως απόλωτο κύμα :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-61)$$

7.7 Μετασχηματισμός του Διανύσματος Stokes Κύματος κατά τή Διέλευσή του μέσα από Γραμμική Διάταξη - Μήτρες Mueller.

Όταν μία ηλεκτρομαγνητική δέσμη (π.χ. μία δέσμη μικροκυμάτων ή μία δέσμη LASER) περάσει μέσα από μία διάταξη (π.χ. μέσα από έναν εξασθενητή, έναν πολωτή, έναν γραμμικό επιβραδυντή $\lambda/2$ κ.ά.) θα πάθει μεταβολές στην έντασή της και στην κατάσταση της πόλωσής της. Θα μετασχηματιστεί δηλαδή το διάνυσμα Stokes που τήν χαρακτηρίζει. Στην περίπτωση που η διάταξη είναι γραμμική, οι παράμετροι Stokes της εισερχόμενης δέσμης είναι γραμμικές συναρτήσεις των παραμέτρων Stokes της εισερχόμενης δέσμης. Έτσι, αν $[S_i]_1$ είναι το διάνυσμα Stokes της εισερχόμενης δέσμης και $[S_i]_2$ της εξερχόμενης (βλ. σχ. 7-8) είναι :



Σχ. 7-8. Ο Μετασχηματισμός του διανύσματος Stokes ενός κύματος, όταν περνά μέσα από γραμμική διάταξη, εκφράζεται από τη μήτρα Mueller (μήτρα μεταφοράς) της διάταξης.

$$[S_i]_2 = [M_{ij}] [S_i]_1 \quad (7-62)$$

όπου $[M_{ij}]$ είναι μία μήτρα 4×4 που λέγεται μήτρα Mueller της διάταξης και αντιπροσωπεύει την επίδραση της διάταξης κατά τη διαβίβαση. Π.χ. η μήτρα Mueller ενός ιδανικού γραμμικού πολωτή, με το χαρακτηριστικό του επίπεδο υπό γωνία $\theta=45^\circ$ από τον άξονα x , είναι :

$$[M_{ij}]_p = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7-63)$$

"Αν από τόν πολωτή αὐτόν περάσουμε μιὰ τελεύως ἀπόλωτη ΗΜ δέσμη, μέ διάνυσμα Stokes :

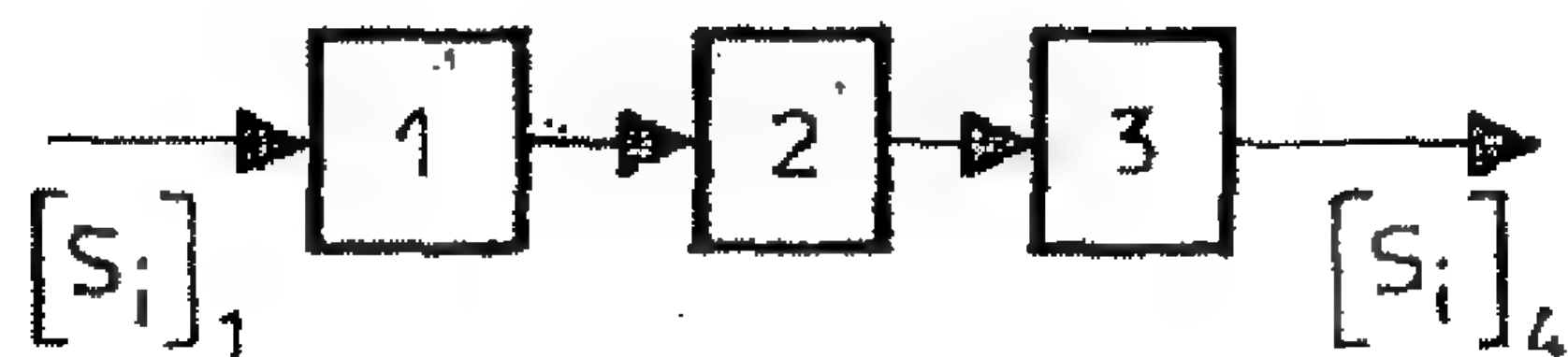
$$[S_i]_1 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Θά ἔχουμε στήν ἔξοδο δέσμη μέ διάνυσμα Stokes :

$$[S_i]_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{I}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-64)$$

Δηλαδή, γραμμικά πολωμένο μέ γωνία πόλωσης $\alpha = 45^\circ$.

"Αν ἡ ΗΜ δέσμη περάσει διαδοχικά ἀπό ἓνα σύστημα γραμμικῶν διατάξεων (π.χ. ὅπως στό σχ. 7-9) τό σύστημα συμπεριφέρεται σάν



μιὰ διάταξη μέ μήτρα Mueller ὅση μέ τό γινόμενο τῶν μητρῶν Mueller τῶν ἐπιμέρους διατάξεων. π.χ. γιά τό σύστημα τοῦ σχ. 7-9 εἶναι :

$$[S_i]_4 = [M_{ij}]_3 [M_{ij}]_2 [M_{ij}]_1 [S_i]_1 =$$

$$= [M_{ij}]_{321} [S_i]_1 \quad (7-65)$$

Σχ. 7-9 Ἐπίδραση γραμμικῶν διατάξεων σέ σειρά. Ἡ ὅλική μήτρα Mueller εἶναι τό γινόμενο τῶν ἐπιμέρους μητρῶν.

Στόν πύνακα τῆς ἐπόμενης σελίδας δύνονται οἱ μήτρες Mueller ὁρισμένων διατάξεων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7-III

Πίνακας Μητρών Mueller 'Ορισμένων Γραμμικών Διατάξεων

ΤΥΠΟΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ	$\vartheta = 0$	$\vartheta = \pm \pi/4$	$\vartheta = \pi/2$	$-\pi \leq \vartheta \leq +\pi$	
'Ιδανικός γραμμικός πολωτής υπό γωνία ϑ .	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & C_2 & S_2 & 0 \\ C_2 & C_2^2 & C_2 S_2 & 0 \\ S_2 & C_2 S_2 & S_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$C_2 \equiv \cos 2\vartheta$ $S_2 \equiv \sin 2\vartheta$
Γραμμικός επιβραδυντής $\lambda/4$ μέ τό γρήγορο άξονα υπό γωνία ϑ	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2^2 & C_2 S_2 & -S_2 \\ 0 & C_2 S_2 & S_2^2 & C_2 \\ 0 & S_2 & -C_2 & 0 \end{bmatrix}$	
Γραμμικός επιβραδυντής $\lambda/2$ μέ τό γρήγορο άξονα υπό γωνία ϑ	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_4 & S_4 & 0 \\ 0 & S_4 & -C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$C_4 \equiv \cos 4\vartheta$ $S_4 \equiv \sin 4\vartheta$
Γραμμικός επιβραδυντής μέ επιβράδυση δ μέ τό γρήγορο άξονα υπό γωνία ϑ .	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \mp \mu \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \pm \mu & 0 & \beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & -\mu \\ 0 & 0 & \mu & \beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2^2 + S_2^2 \beta & C_2 S_2 (1-\beta) & -S_2 \mu \\ 0 & C_2 S_2 (1-\beta) & S_2^2 + C_2^2 \beta & C_2 \mu \\ 0 & S_2 \mu & -C_2 \mu & \beta \end{bmatrix}$	$\beta \equiv \cos \delta$ $\mu \equiv \sin \delta$
Στροφέας του άξονα x σε γωνία ϑ ως προς τον παλαιό άξονα x ή κυκλικός επιβραδυντής που επιβραδύνει την δεξιόστροφη συνιστώσα κατά 2ϑ .	$R(\vartheta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & S_2 & 0 \\ 0 & -S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$				Τή μήτρα $R(\vartheta)$ μπορούμε νά τή χρησιμοποιήσουμε γιά νά μετασχηματίσουμε τή μήτρα Mueller ενός όποιουδήποτε πολωτικού συστήματος μέ άρχικό προσανατολισμό φ στην άντίστοιχη μήτρα του συστήματος γιά ένα νέο προσανατολισμό $(\varphi + \vartheta)$, μέ τή σχέση: $M(\varphi + \vartheta) = R(-\vartheta) M(\varphi) R(\vartheta)$

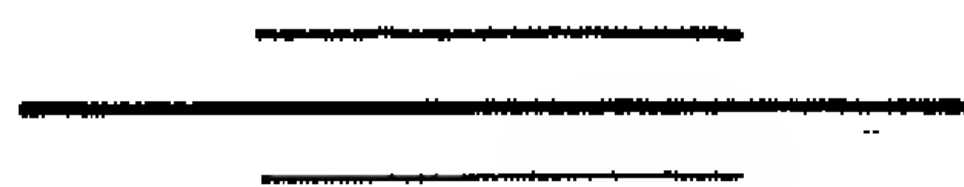
Στόν πίνακα 7-III προσθέτουμε καί τή μήτρα Mueller ενός " απορροφητή " (absorber).

$$[M_{ij}] = e^{-2\bar{n}} \begin{bmatrix} \cosh 2\varepsilon & -\sinh 2\varepsilon & 0 & 0 \\ -\sinh 2\varepsilon & \cosh 2\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7-66)$$

όπου, αν n_x καί n_y οί συντελεστές εξασθένησης γιά τίς διευθύνσεις x καί y αντίστοιχα, είναι :

$$\bar{n} = \frac{n_x + n_y}{2} \quad (7-67)$$

$$\text{καί} \quad \varepsilon = \frac{n_x - n_y}{2} \quad (7-68)$$



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Λύση τῆς Διαφορικῆς Ἐξίσωσης τοῦ Κυκλικοῦ Κυλινδρικοῦ Κυματοδηγοῦ.

Γιὰ νά λύσουμε τή διαφορική ἐξίσωση (5-117) θά χρησιμοποιοῦμε τή μέθοδο τοῦ χωρισμοῦ τῶν μεταβλητῶν.

Θεωροῦμε, λοιπόν, ὅτι ἡ (5-117) :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + k_c^2 U = 0 \quad (1)$$

ἔχει λύση τῆς μορφῆς :

$$U = R(\rho) F(\varphi) \quad (2)$$

Ὡστε ἡ (1) γράφεται:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{R\rho} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{F\rho^2} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = -k_c^2 \quad (3)$$

$$\eta \quad \rho^2 \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{dR}{d\rho} + k_c^2 \rho^2 = -\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} \quad (4)$$

Τό πρῶτο μέλος τῆς (4) εἶναι μόνο συνάρτηση τοῦ ρ , ἐνῶ τό δεύτερο εἶναι συνάρτηση μόνο τοῦ φ . Γιὰ νά ἰσχύει λοιπόν ἡ (5), γιὰ ὅλα τά ρ καί φ , πρέπει κάθε μέλος τῆς νά εἶναι σταθερό καί ἔστω ὅτι εἶναι ἴσο μέ k_φ^2 :

$$-\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = k_\varphi^2 \quad (5)$$

καί
$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k_c^2 - \frac{k_\varphi^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (6)$$

Η (5) γράφεται:

$$\frac{d^2 F}{d\varphi^2} + k_\varphi^2 F = 0 \quad (7)$$

καί έχει γενική λύση

$$F = M \cos k_\varphi \varphi + N \sin k_\varphi \varphi \quad (8)$$

Η F πρέπει νά είναι συνεχής καί μονότιμη (θά πρέπει $F(\varphi+2n\pi) = F(\varphi)$). Τοῦτο συμβαίνει μόνο ἂν ἡ σταθερά k_φ είναι ἀκέραιος ἀριθμός, δηλαδή ἂν :

$$k_\varphi = n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9)$$

καί :

$$F = M \cos n \varphi + N \sin n \varphi \quad (10)$$

Η (6) γράφεται:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k_c^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (11)$$

Κάνοντας τήν ἀντικατάσταση^{*)}

$$u = k_c \rho \quad (12)$$

^{*)} Γιά νά κάνουμε τήν ἀντικατάσταση αὐτή πρέπει $k_c \neq 0$. Στήν περίπτωση πού $k_c = 0$ καί $n = 0$ εὐκόλα ἀποδεδείχνεται ὅτι ἡ λύση τῆς (11) είναι :

$$R = A \ln \rho + B \quad (\alpha)$$

ἐνῶ στήν περίπτωση, πού $k_c = 0$ καί $n \neq 0$ ἡ λύση τῆς (11) ἔχει τή γενική μορφή:

$$R = A_n \rho^n + B_n \rho^{-n} \quad (\beta)$$

Ἐδῶ θεωροῦμε $k_c \neq 0$, γιατί στήν ἀντίθετη περίπτωση, πού ἰσχύουν δηλ. ἡ (α) καί ἡ (β), ἡ R στίς θέσεις $\rho = 0$ (ἄξονας z) ἀπειρίζεται. Τά πεδία ὅμως (ἐπομένως καί ἡ R) πρέπει νά ἔχουν πεπερασμένη τιμή σ' ὅλο τό ἐσωτερικό τοῦ κυματοδηγοῦ.

γράφουμε τήν (11) ἔτσι :

$$\frac{d^2 R}{d u^2} + \frac{1}{u} \frac{d R}{d u} + \left(1 - \frac{n^2}{u^2}\right) R = 0 \quad (13)$$

Ἡ (13) εἶναι ἡ λεγόμενη διαφορικὴ ἐξίσωσις τοῦ Bessel, πού ἔχει δύο ἀνεξάρτητες λύσεις μέ τή μορφή σειρῶν :

$$J_n(k_c \rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{k_c \rho}{2}\right)^{n+2m}}{m!(n+m)!} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{καί} \quad Y_n(k_c \rho) = & \frac{2}{\pi} \left(\gamma_e + \ln \frac{|k_c \rho|}{2} \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{2}{k_c \rho}\right)^{n-2m} \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{k_c \rho}{2}\right)^{n+2m}}{m!(n+m)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m+n}\right) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{ὅπου} \quad \gamma_e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0.5772 \quad (16)$$

ὁ λεγόμενος ἀριθμὸς τοῦ Euler.

Ἡ $J_n(k_c \rho)$ λέγεται συνάρτησις Bessel πρώτου εἴδους, ἐνῶ ἡ $Y_n(k_c \rho)$ συνάρτησις Bessel δευτέρου εἴδους καί τίς βρίσκει συνήθως κανένας σέ πίνακες.

Γιὰ k_c = πραγματικό, οἱ συναρτήσεις αὐτές ἐμφανίζουν ταλάντωση (βλ. σχῆμα 1)

$$\text{"Αν} \quad k_c \rho \gg 1, n \quad (17)$$

ἔχουμε :

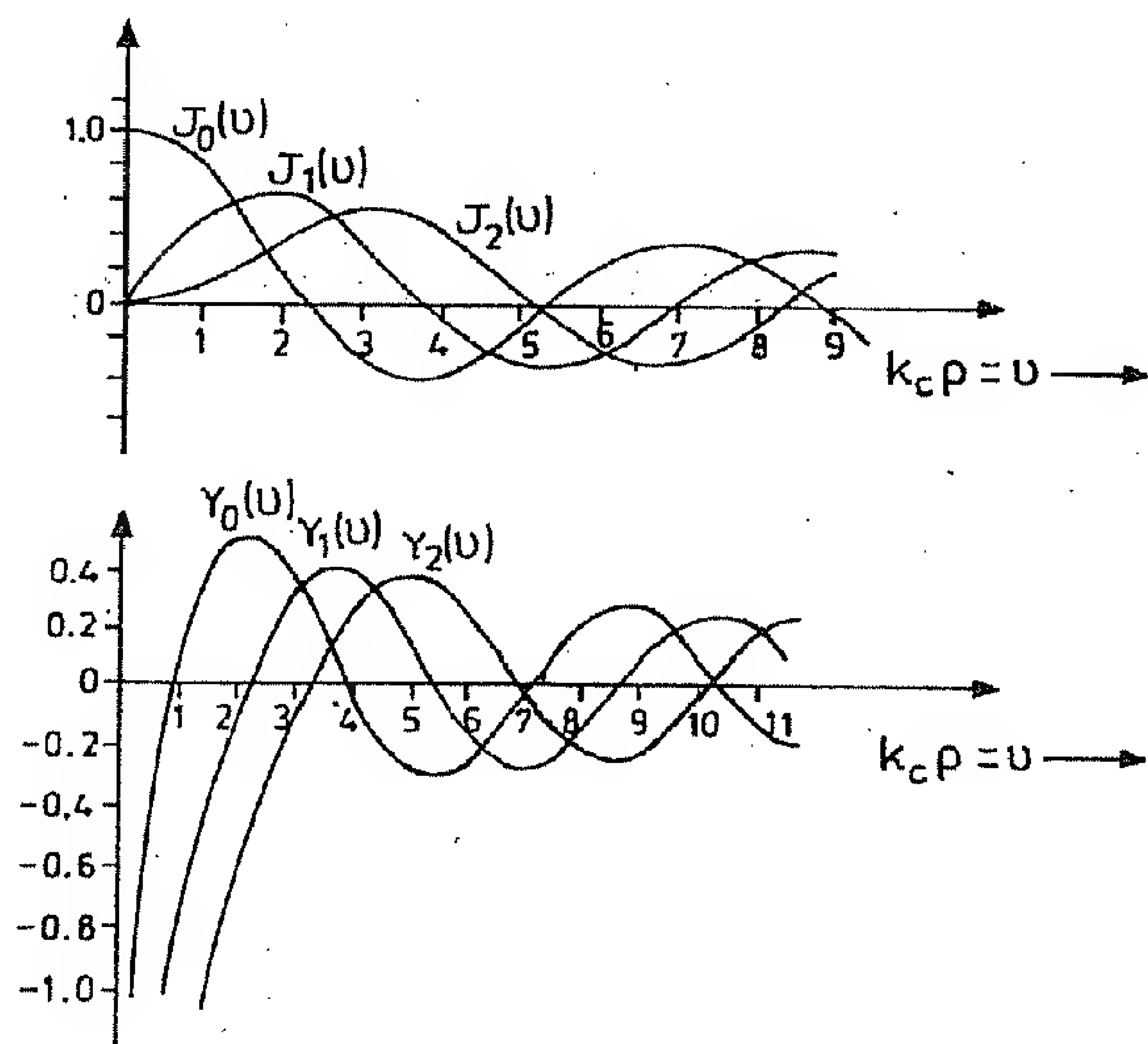
$$J_n(k_c \rho) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k_c \rho}} \cos\left(k_c \rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (18)$$

$$Y_n(k_c \rho) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k_c \rho}} \sin\left(k_c \rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (19)$$

Γιὰ τὸ λόγῳ αὐτὸ προσφέρεται ἡ εἰσαγωγή τῶν συναρτήσεων :

$$H_n^{(1)}(k_c \rho) = J_n(k_c \rho) + j Y_n(k_c \rho) \quad (20)$$

$$H_n^{(2)}(k_c \rho) = J_n(k_c \rho) - j Y_n(k_c \rho) \quad (21)$$



Σχ. 1 Οἱ συναρτήσεις τοῦ Bessel πρώτου καὶ δευτέρου εἴδους.

Οἱ συναρτήσεις $H_n^{(1)}(k_c \rho)$ καὶ $H_n^{(2)}(k_c \rho)$ εἶναι λύσεις τῆς ἐξίσωσης Bessel καὶ λέγονται συναρτήσεις Bessel πρώτου εἴδους ἢ συναρτήσεις Hankel.

Όταν

$$k_c \rho \gg 1, n \quad (22)$$

είναι:

$$H_n^{(1)} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k_c \rho}} e^{j(k_c \rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \quad (23)$$

$$H_n^{(2)} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k_c \rho}} e^{-j(k_c \rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \quad (24)$$

Οι (23) και (24) αν πολλαπλασιασθούν επί $e^{j\omega t}$, παριστάνουν, αντίστοιχα, εισερχόμενα και εξερχόμενα κυλινδρικά αρμονικά κύματα.

Αν είναι :

$$k_c \rho \ll 1 \quad (25)$$

τότε

$$J_n(k_c \rho) \rightarrow \frac{\left(\frac{k_c \rho}{2}\right)^n}{n!} \quad (26)$$

και

$$Y_n(k_c \rho) \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(\gamma_e + \ln \frac{|k_c \rho|}{2} \right), & n=0 \\ -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{k_c \rho} \right)^n, & n \neq 0 \end{cases} \quad (27)$$

Ανεξάρτητα από την τιμή του n οι συναρτήσεις $Y_n(u) = Y_n(k_c \rho)$ έχουν πόλο στη θέση $\rho=0$, δηλ. πάνω στον άξονα z . Για τó λόγο αυτό πρέπει νά αποφεύγουμε νά τís χρησιμοποιοῦμε σέ προβλήματα, πού στήν υπό μελέτη περιοχή περιλαμβάνεται και ó άξονας z , εκτός αν στίς θέσεις $\rho=0$ υπάρχει γραμμική πηγή πεδίου (π.χ. ένα λεπτό φορτισμένο σύρμα).

Αν τó k_c είναι φανταστικό εξακολουθούν νά ισχύουν οι (14),

(15). Μπορούμε τότε νά όρίσουμε δύο τροποποιημέ -

νες συναρτήσεις Bessel, που είναι πραγματικές, ως εξής :

Υποθέτουμε ότι

$$k_c = j t \quad (28)$$

καὶ ὁρίζουμε τὴς

$$I_n(t\rho) = (j)^{-n} J_n(j t \rho) \quad (29)$$

$$K_n(t\rho) = \frac{\pi}{2} (j)^{n+1} H_n^{(1)}(j t \rho) \quad (30)$$

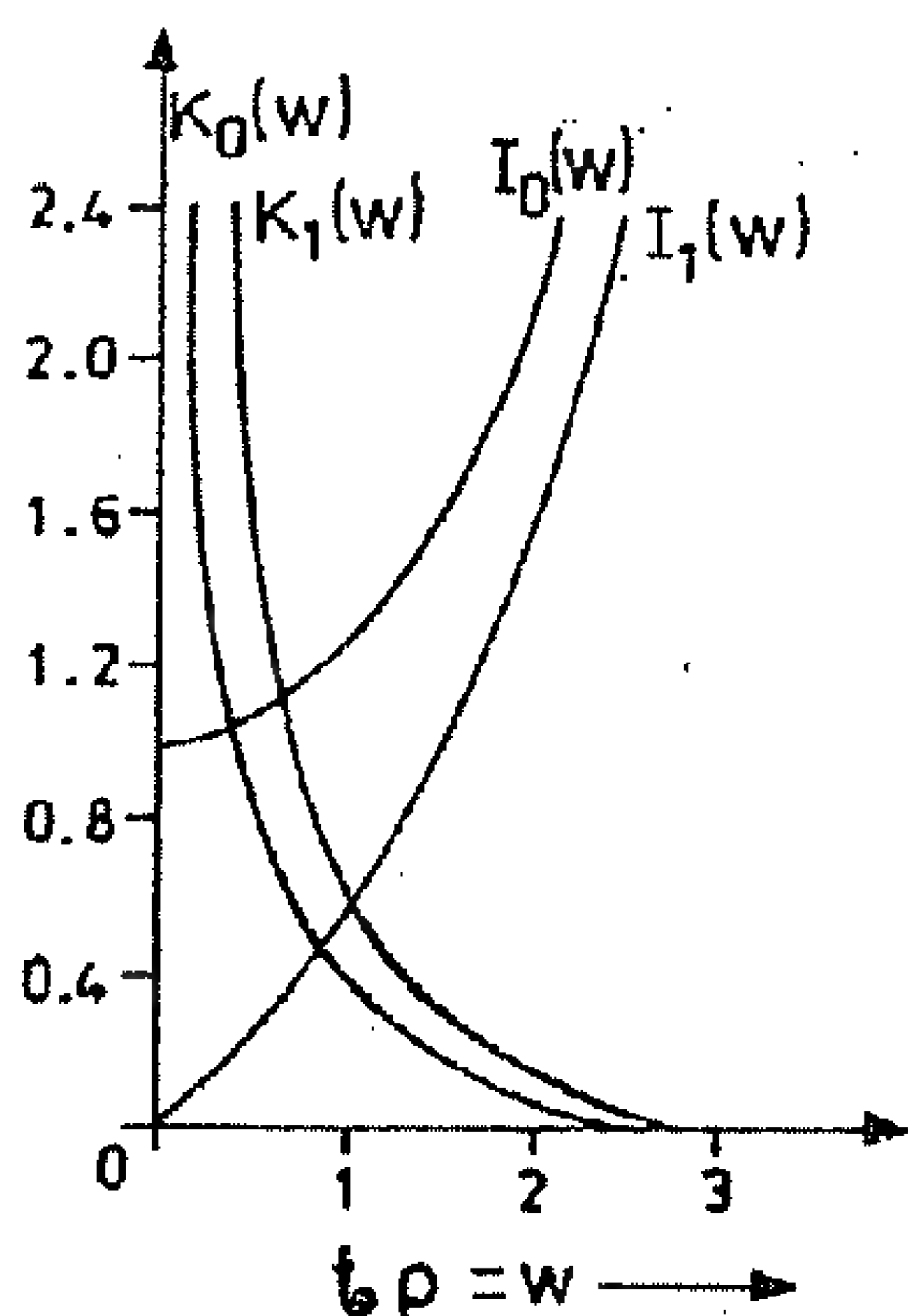
Οἱ $I_n(t\rho)$ καὶ $K_n(t\rho)$ ἀποτελοῦν ἓνα ἀνεξάρτητο σύνολο λύσεων τῆς ἐξίσωσης Bessel. Ὄταν

$$t\rho \gg 1, n \quad (31)$$

τότε

$$I_n(t\rho) \rightarrow \frac{e^{t\rho}}{\sqrt{2\pi t\rho}} \quad (32)$$

$$K_n(t\rho) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2t\rho}} e^{-t\rho} \quad (33)$$



Σχ. 2 Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel.

Στό σχ. 2 παριστάνονται μερικές από τὴς πρῶτες τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel.

Στόν ἐπόμενο πίνακα δίνουμε μερικές ιδιότητες καὶ ὁρισμένους ἀναγωγικούς τύπους τῶν συναρτήσεων Bessel.

Ἡ λύση (2) τῆς (1) δίνεται ἀπό τό γινόμενο τῶν $R_n(\rho)$, $F_n(\phi)$ γιὰ κάθε περίπτωση τοῦ k_c ὅπως δείχνει

ὁ πίνακας I πού ἀκολουθεῖ. Ἡ γενική λύση τῆς (1) προκύπτει σάν ἄθροισμα τῶν συναρτήσεων $U_n(\rho, \varphi)$ τοῦ πίνακα I .

$$U = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n \quad (34)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ I

$$J_{-n}(v) = (-1)^n J_n(v)$$

$$Y_n(v) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\cos \nu \pi J_\nu(v) - J_{-\nu}(v)}{\sin \nu \pi}$$

$$Y_{-n}(v) = (-1)^n Y_n(v)$$

$$I_{-n}(w) = I_n(w)$$

$$K_{-n}(w) = K_n(w)$$

$$n J_n(v) = \frac{v}{2} [J_{n-1}(v) + J_{n+1}(v)]$$

$$J'_n(v) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(v) - J_{n+1}(v)]$$

$$\cos(x \sin \vartheta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos 2n\vartheta$$

$$\cos(x \cos \vartheta) = J_0(x) - 2J_2(x) \cos 2\vartheta + 2J_4(x) \cos 4\vartheta - \dots$$

$$\sin(x \sin \vartheta) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \sin(2n-1)\vartheta$$

$$\sin(x \cos \vartheta) = 2 [J_1(x) \cos \vartheta - J_3(x) \cos 3\vartheta + \dots]$$

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dv} [v^n J_n(v)] = v^n J_{n-1}(v) \\ \frac{d}{dv} [v^{-n} J_n(v)] = -v^{-n} J_{n+1}(v) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \int J_1(v) dv = -J_0(v) \\ \int v J_0(v) dv = v J_1(v) \\ \int J_0^2(v) v dv = \frac{v^2}{2} [J_0^2(v) + J_1^2(v)] \\ \int J_n^2(v) v dv = \frac{v^2}{2} [J_n^2(v) - J_{n-1}(v) J_{n+1}(v)] \end{array} \right.$$

ΠΙΝΑΚΑΣ II

Λ Υ Σ Η	$k_c = 0$		$k_c = \text{πραγμ.} \neq 0$	$k_c = j t$
	$n = 0$	$n = \pm 1, \pm 2, \dots$	$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	$n = +0, \pm 1, \pm 2, \dots$
$R_n(\rho)$	$A \ln \rho + B$	$A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}$	$A_n J_n(k_c \rho) + B_n Y_n(k_c \rho)$	$A_n I_n(t \rho) + B_n K_n(t \rho)$
$F_n(\varphi)$	$M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi$			
$U_n(\rho, \varphi)$	Δέν ενδιαφέρει έδω	$(A_n J_n + B_n Y_n)(M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi)$		Δέν ενδιαφέρει έδω

Επειδή οι συναρτήσεις Y_n και K_n εμφανίζουν ασυνέχεια (άπει-
ρίζονται) για $\rho = 0$ και επειδή στο πρόβλημά μας περιλαμβάνεται
ο άξονας $z(\rho=0)$ στην περιοχή που μελετούμε, στις λύσεις U_n του
πίνακα I θεωρούμε ότι:

$$B_n = 0 \quad (35)$$

Για κάθε n έχουμε λοιπόν και μία ανεξάρτητη λύση:

$$U_n = U_0 J_n(k_c \rho) [\cos n\varphi + \sin n\varphi] \quad (36)$$

που αν αγνοήσουμε τόν ήμιτονικό προσθετέο γίνεται απλούστερη :

$$U_n = U_0 J_n(k_c \rho) \cos n\varphi \quad (37)$$

και σημαίνει ότι η U_n είναι μέγιστη στις θέσεις $\varphi = 0$ και $\varphi = \pi$
και μηδέν στις θέσεις $\pi/2$ και $3\pi/2$. Αν αντί του ήμιτονικού
όρου παραλείψαμε τόν συνημιτονικό, οι συνθήκες του U_n θα περι-
στρέφονταν κατά 90° . Υποθέτοντας όμως ότι ο εγκάρσιος προσα-
νατολισμός του πεδίου είναι αυθαίρετος μάς αρκεί οποιαδήποτε
από τις δύο λύσεις.

Σ η μ ε ρ ώ σ η

Στήν περίπτωση διαδόσεως κυκλικά πολωμένου Ἡλεκτρομαγνητικοῦ κύματος μέσα ἀπό τόν κυματοδηγό πρέπει νά ληφθοῦν ὑπόψη καί οἱ δύο ὅροι.

Στόν ἐπόμενο πύνακα δύνονται οἱ τιμές τῶν πρώτων ριζῶν τῆς συνάρτησης Bessel α' εἴδους $J_n(u)$ καθώς καί τῆς πρώτης παραγώγου τῆς $J_n(u)$.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ

ΜΕΡΙΚΕΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΡΩΤΕΣ ΡΙΖΕΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ BESSEL $J_n(u)$ ΚΑΙ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΤΗΣ $J_n'(u)$

A/A ΡΙΖΑΣ	$J_0(u)$	$J_1(u)$	$J_2(u)$	$J_3(u)$	$J_4(u)$	$J_5(u)$
1	2,4048	3,8317	5,1356	6,3802	7,5883	8,7715
2	5,5201	7,0156	8,4172	9,7610	11,0647	12,3386
3	8,6537	10,1735	11,6198	13,0152	14,3725	15,7002
4	11,7915	13,3237	14,7960	16,2235	17,6160	18,9801
5	14,9309	16,4706	17,9538	19,4094	20,8269	22,2178
	$J_0'(u)$	$J_1'(u)$	$J_2'(u)$	$J_3'(u)$		
1	3,8317	1,8412	3,0542	4,2012		
2	7,0156	5,3314	6,7061	8,0152		
3	10,1735	8,5363	9,9695	11,3459		

*) Παρατήρησι : Ὅπως προκύπτει καί ἀπό τίς τιμές τοῦ πύνακα εἶναι $J_0'(u) = -J_1(u)$. Δηλαδή οἱ $J_1(u)$ καί $J_0'(u)$ ἔχουν τίς ἴδιες ρίζες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Σημείωση Τά προβλήματα έχουν καταχωρηθεῖ κατὰ κεφάλαιο στὶς ἀκόλουθες δύο κατηγορίες :

A . Πρόβλήματα στὰ ὅποια δύνεται ἡ πλήρης λύση τους .

B . Πρόβλήματα στὰ ὅποια δύνεται μόνο τὸ ἀποτέλεσμά τους .

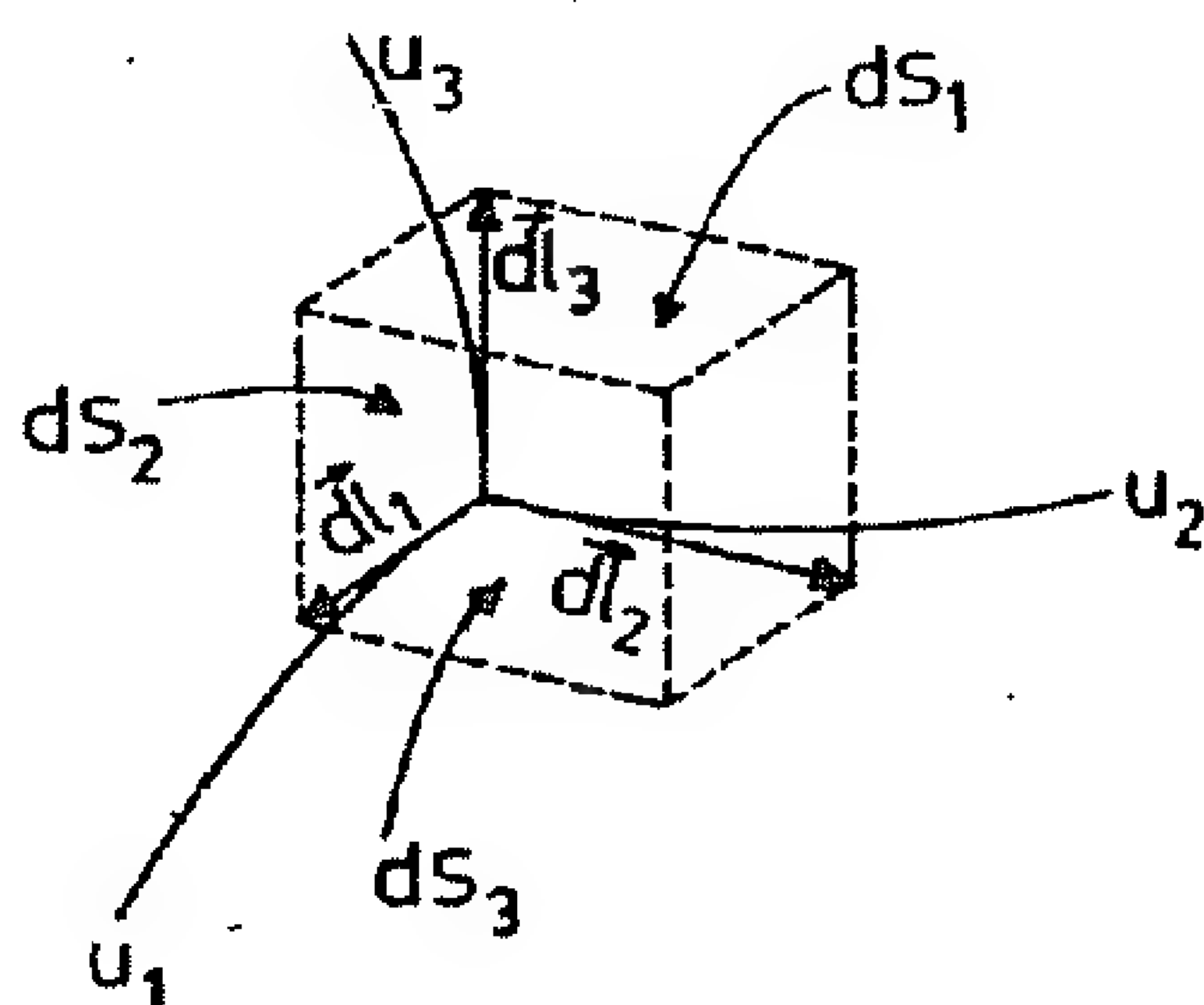
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Νά προσδιοριστοῦν οἱ ἐκφράσεις, πού δύνουν τὸ στοιχειῶδες ἐμβαδό, πάνω σέ κάθε συντεταγμένη ἐπιφάνεια, ἐνός ὀρθογώνιου καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων, μέ παράγοντες κλίμακας h_1 , h_2 , h_3 .

Λύση

Θεωροῦμε τὸ στοιχειῶδες ὀρθογώνιο τοῦ σχήματος σέ κάποια τυχαία θέση \vec{r} τοῦ χώρου . Εἶναι :

$$\left. \begin{aligned} dl_1 &= h_1 du_1 \\ dl_2 &= h_2 du_2 \\ dl_3 &= h_3 du_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



Από τις σχέσεις (1) έχουμε :

$$\left. \begin{aligned} dS_1 &= dl_2 dl_3 = h_2 h_3 du_2 du_3 \\ dS_2 &= dl_3 dl_1 = h_3 h_1 du_3 du_1 \\ dS_3 &= dl_1 dl_2 = h_1 h_2 du_1 du_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Οι (2) είναι οι εκφράσεις, που ζητούνται .

1.2 Νά αποδείξετε ότι σ' ένα ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων (u_1, u_2, u_3) τα μοναδιαία διανύσματα $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$, που εφάπτονται στις συντεταγμένες καμπύλες, στην τυχαία θέση \vec{r} , μπορούν να προσδιοριστούν από τις σχέσεις :

$$\hat{u}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

όπου h_i , $i=1,2,3$ οι παράγοντες κλίμακας του συστήματος .

Λύση

Τα διανύσματα

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} &= \lim_{\Delta u_1 \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(u_1 + \Delta u_1, u_2, u_3) - \vec{r}(u_1, u_2, u_3)}{\Delta u_1} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} &= \dots \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} &= \dots \end{aligned} \quad (1)$$

εφάπτονται, αντίστοιχα, στις συντεταγμένες καμπύλες u_1 , u_2 , u_3 . Τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα \hat{u}_i θα είναι:

$$\hat{u}_i = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right|}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

Άλλά είναι :

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right| = \frac{dl_i}{du_i} = h_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

Όστε :

$$\hat{u}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \quad (4)$$

1.3 Νά μετασχηματιστεῖ τό διάνυσμα $\vec{R} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$ ἀπό τό κυλινδρικό σύστημα στό καρτεσιανό.

Λύση

Ἄς ποῦμε ὅτι τό διάνυσμα πού ζητοῦμε εἶναι τό

$$\vec{R} = R_x \hat{x} + R_y \hat{y} + R_z \hat{z} \quad (1)$$

Θά εἶναι :

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \vec{R} \cdot \hat{x} \\ R_y &= \vec{R} \cdot \hat{y} \\ R_z &= \vec{R} \cdot \hat{z} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Δηλαδή :

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \rho \hat{\rho} \cdot \hat{x} + z \hat{z} \cdot \hat{x} = \rho \cos \varphi + 0 = \rho \cos \varphi = x \\ R_y &= \rho \hat{\rho} \cdot \hat{y} + z \hat{z} \cdot \hat{y} = \rho \sin \varphi + 0 = \rho \sin \varphi = y \\ R_z &= \rho \hat{\rho} \cdot \hat{z} + z \hat{z} \cdot \hat{z} = 0 + z = z \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ἀπό τίς (3) ἢ (1) γύνεται :

$$\vec{R} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \equiv \vec{r} \quad (4)$$

Όστε τό διάνυσμα $\vec{R} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z} = \rho \hat{\rho} + 0 \hat{\phi} + z \hat{z}$, πού παριστάνει ἓνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου $\varphi = \text{σταθ.}$, ταυτίζεται μέ τό διάνυσμα θέσης \vec{r} τοῦ καρτεσιανοῦ συστήματος.

1.4 Νά υπολογιστοῦν οἱ παράγωγοι τῶν μοναδιαίων διανυσμάτων τοῦ κυλινδρικοῦ συστήματος συντεταγμένων ὡς πρὸς ρ , φ καὶ z , ἀφοῦ πρῶτα ὁριστοῦν τὰ διανύσματα αὐτά.

Λύση

$$\text{Θεωροῦμε τὸ διάνυσμα θέσης: } \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (1)$$

καὶ τίς σχέσεις μετασχηματισμοῦ

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ἔχουμε (βλ. σχέση (4) τοῦ προβλ. 1.2) :

$$\hat{\rho} = \frac{\partial \vec{r} / \partial \rho}{|\partial \vec{r} / \partial \rho|} = \frac{\hat{x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \hat{y} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \hat{z} \frac{\partial z}{\partial \rho}}{|\partial \vec{r} / \partial \rho|} = \frac{\hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi$$

$$\hat{\varphi} = \frac{\partial \vec{r} / \partial \varphi}{|\partial \vec{r} / \partial \varphi|} = \frac{\hat{x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \hat{y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \hat{z} \frac{\partial z}{\partial \varphi}}{|\partial \vec{r} / \partial \varphi|} = \frac{-\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi}{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

$$\hat{z} = \frac{\partial \vec{r} / \partial z}{|\partial \vec{r} / \partial z|} = \frac{0 + 0 + \hat{z}}{1} = \hat{z}$$

Ἄρα:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\rho} &= \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi \\ \hat{\varphi} &= -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi \\ \hat{z} &= \hat{z} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ἀπὸ τίς (3) προκύπτουν οἱ παράγωγοι :

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial \hat{z}}{\partial \rho} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi = \hat{\varphi}, \quad \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} = -\hat{x} \cos \varphi - \hat{y} \sin \varphi = -\hat{\rho}, \quad \frac{\partial \hat{z}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} = 0$$

1.5 Μία καμπύλη C δίνεται στο χώρο από τις παραμετρικές της εξισώσεις $x = x(l)$, $y = y(l)$, $z = z(l)$, όπου l τό μήκος πάνω στην καμπύλη C . "Αν \vec{r} είναι τό διάνυσμα θέσης όποιουδήποτε σημείου της C , νά αποδειχτεϊ ότι τό διάνυσμα $d\vec{r}/dl$ είναι μοναδιαίο έφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης C .

Λύση

Τό διάνυσμα
$$\frac{d\vec{r}}{dl} = \frac{d(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})}{dl} = \frac{dx}{dl}\hat{x} + \frac{dy}{dl}\hat{y} + \frac{dz}{dl}\hat{z}$$

έφάπτεται στην καμπύλη C στη θέση \vec{r} , αφού έχει τή διεύθυνση του $d\vec{r}$.

Εξάλλου

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dl} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dl} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dl} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dl} \right)^2} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dl^2}}$$

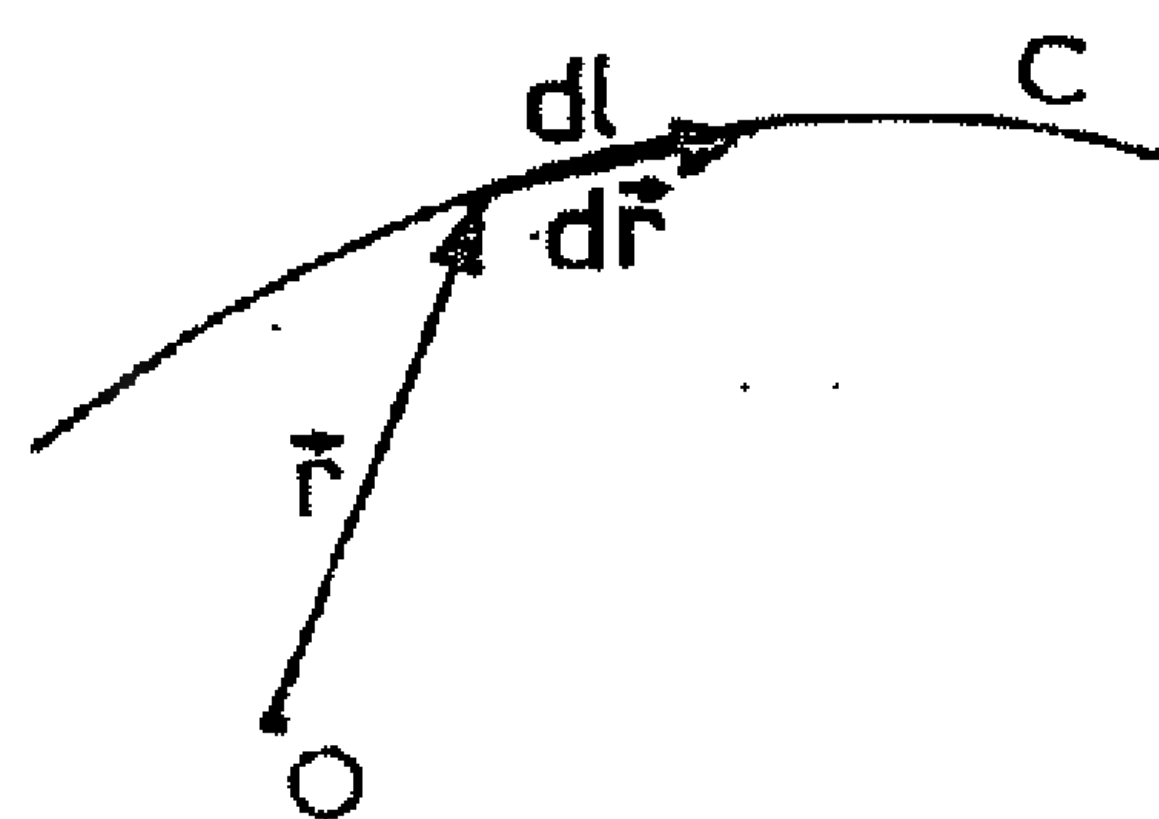
και αφού

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Προκύπτει ότι:

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dl} \right| = 1$$

Ωστε τό διάνυσμα $d\vec{r}/dl$ είναι μοναδιαίο και έφάπτεται στην καμπύλη C .



1.6 Έστω ότι η κίνηση ενός υλικού σημείου περιγράφεται από την εξίσωση

$$\vec{r} = r \cos \omega t \cdot \hat{x} + r \sin \omega t \cdot \hat{y} \quad (1)$$

όπου $r = \text{σταθ.}$ και $\omega = \text{σταθ.}$

α) Νά προσδιοριστεί η ταχύτητα \vec{v} του σημείου και ν' αποδειχτεί ότι είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης \vec{r} .

β) Νά προσδιοριστεί η επιτάχυνση $\vec{\gamma}$ του σημείου και νά αποδειχτεί ότι έχει την ίδια διεύθυνση με το \vec{r} αλλά αντίθετη φορά, δηλαδή κατευθύνεται προς την αρχή των αξόνων.

γ) Ν' αποδειχτεί ότι $\vec{r} \times \vec{v} = \text{σταθ.}$

Λύση

$$\alpha) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -r\omega \sin \omega t \cdot \hat{x} + r\omega \cos \omega t \cdot \hat{y} \quad (2)$$

$$v = \sqrt{r^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + r^2 \omega^2 \cos^2 \omega t} = \omega \cdot r \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{v} &= (r \cos \omega t \cdot \hat{x} + r \sin \omega t \cdot \hat{y}) \cdot (-r\omega \sin \omega t \cdot \hat{x} + r\omega \cos \omega t \cdot \hat{y}) = \\ &= -r^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t + r^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ώστε :} \quad \vec{r} \cdot \vec{v} = 0 \quad (4)$$

Η ταχύτητα λοιπόν δίνεται από τη (2) έχει μέτρο σταθερό ($v = \omega r$) και είναι κάθετη πάνω στο διάνυσμα θέσης \vec{r} .

$$\beta) \quad \vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\omega^2 \cos \omega t \cdot \hat{x} - r\omega^2 \sin \omega t \cdot \hat{y} = -\omega^2 (r \cos \omega t \cdot \hat{x} + r \sin \omega t \cdot \hat{y})$$

$$\text{ή} \quad \vec{\gamma} = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\gamma) \vec{r} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r \cos \omega t & r \sin \omega t & 0 \\ -r\omega \sin \omega t & r\omega \cos \omega t & 0 \end{vmatrix} = \hat{z}(r^2 \omega \cos^2 \omega t + r^2 \omega \sin^2 \omega t) = r^2 \omega \hat{z} = \text{σταθ.}$$

Παρατήρηση 'Η κίνηση είναι όμαλή κυκλική κίνηση ύλικοῦ σημεῖου. "Αν m ἡ μάζα τοῦ ύλικοῦ σημείου, τό διάνυσμα

$$\vec{G} = \vec{r} \times m\vec{v} = m \vec{r} \times \vec{v} = m \omega r^2 \hat{z}$$

είναι τό γνωστό διάνυσμα τῆς στροφομῆς τοῦ ύλικοῦ σημείου.

1.7 "Ενα ύλικό σημεῖο ἔλκεται ἀπό μιὰ δύναμη, ποῦ προέρχεται ἀπό ὀρισμένο σημεῖο O (κεντρική δύναμη). "Ας θεωρήσουμε τό O σάν ἀρχή τῶν ἀξόνων. "Αν ἡ δύναμη είναι

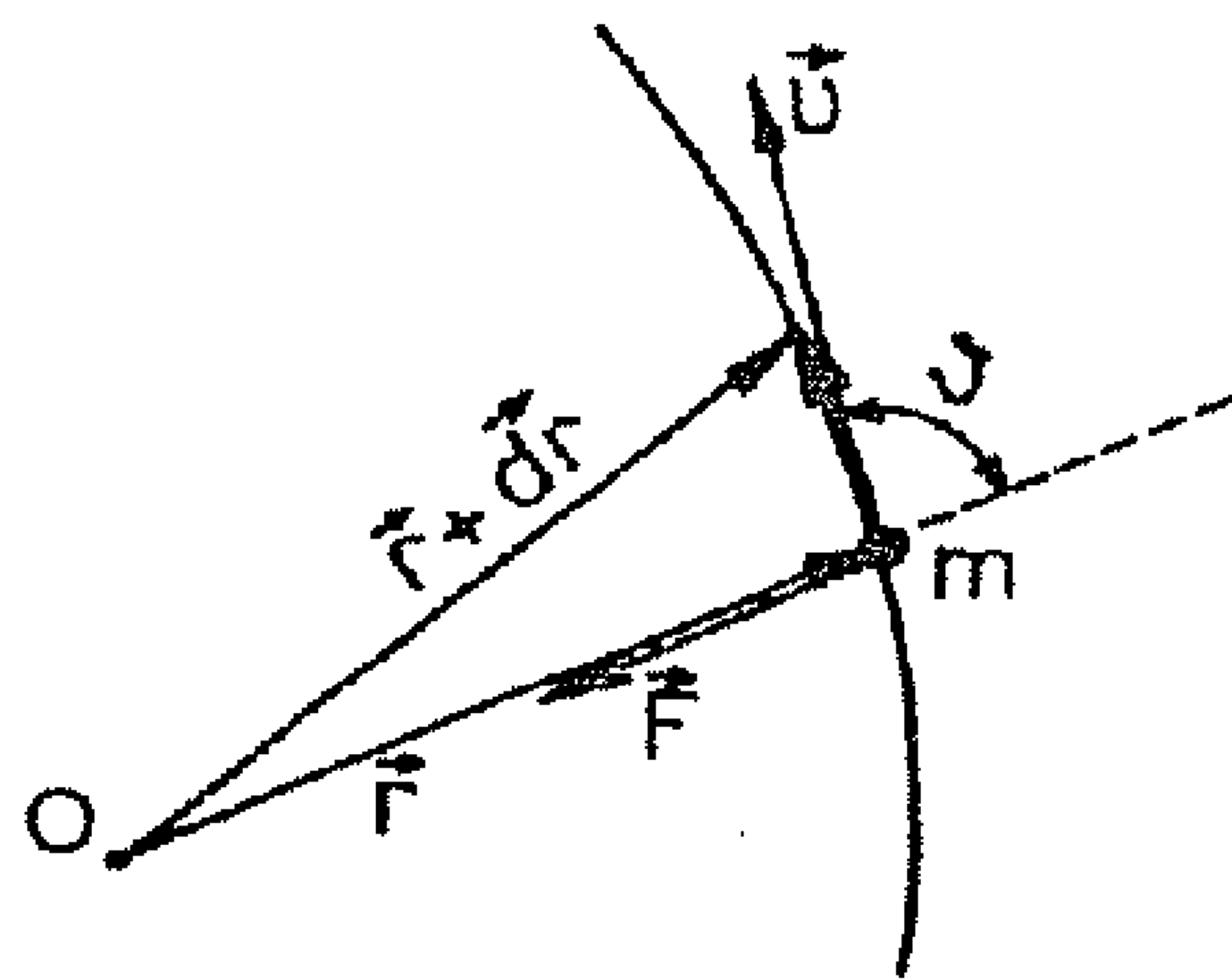
$$\vec{F} = f(r) \vec{r} \quad (1)$$

ὅπου \vec{r} τό διάνυσμα θέσης τοῦ σημείου, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ στροφομή \vec{G} τοῦ ύλικοῦ σημείου ὡς πρὸς τό O είναι σταθερό διάνυσμα καί νά προσδιορίσετε τή διεύθυνση καί τή φορά τοῦ διανύσματος αὐτοῦ. "Αν m ἡ μάζα τοῦ ύλικοῦ σημείου τί ἐκφράζει τό διάνυσμα $\vec{H} = \frac{1}{2m} \vec{G}$;

Λύση

'Από τόν θεμελιώδη νόμο τῆς μηχανικῆς είναι :

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{J}}{dt} \quad (2)$$



ὅπου $\vec{J} = m\vec{v}$ ἡ ὁρμή τοῦ ύλικοῦ σημείου. 'Η στροφομή τοῦ ύλικοῦ σημείου είναι :

$$\vec{G} = \vec{r} \times \vec{J} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (3)$$

Από τήν (3) έχουμε :

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{J} + \vec{r} \times \frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = m\vec{v} \times \vec{v} + f(r)\vec{r} \times \vec{r} \quad (4)$$

Αλλά $\vec{v} \times \vec{v} = 0$, $\vec{r} \times \vec{r} = 0$ (5)

Ωστε : $\frac{d\vec{G}}{dt} = 0$ (6)

ή $\vec{G} = \text{σταθ.}$ (7)

Από τήν (3) προκύπτει ότι η \vec{G} είναι κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς (των \vec{r} και \vec{v}) κι έχει τή φορά του εξωτερικού γινομένου $\vec{r} \times \vec{v}$

Από τήν (3) έχουμε ακόμα : $\vec{H} = \frac{1}{2m} \vec{G} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \text{σταθ.}$ (8)

Τό διάνυσμα \vec{H} έχει τή διεύθυνση και φορά της στροφορμής \vec{G} και μέτρο

$$H = \frac{1}{2} r \frac{dl}{dt} \cdot \sin \vartheta \quad (9)$$

Αλλά

$$\frac{1}{2} r \, dl \, \sin \vartheta = dS \quad (10)$$

όπου dS τό έμβαδό πού διαγράφει τό διάνυσμα \vec{r} μέσα στό χρόνο dt .

Ωστε : $H = \frac{dS}{dt}$ (11)

Τό διάνυσμα \vec{H} λοιπόν εκφράζει τήν "έμβαδική ταχύτητα" του υλικού σημείου. Και έπειδή (βλ. σχέση (8)) $\vec{H} = \text{σταθ.}$ βγαίνει τό συμπέρασμα ότι η έμβαδική ταχύτητα του σημείου είναι σταθερή , δηλ. τό διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου διαγράφει σέ έξους χρόνους έσα έμβαδά πάνω στό επίπεδο της τροχιάς (Νόμος των έμβαδων του Kepler) .

1.8 Νά προσδιοριστεί τό κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα \hat{n} στό τυχαίο σημείο (x, y, z) τῆς σφαίρας:

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = R^2 \quad (1)$$

Εἰδικά : Στά σημεία: α) $(R, 0, c)$ β) $(0, R, c)$
 γ) $(0, 0, c+R)$ καί δ) $(0, 0, c-R)$.

Λύση

Ἡ σφαῖρα περιγράφεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$\Phi(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + (z - c)^2 - R^2 = 0 \quad (2)$$

Στήν τυχαία θέση (x, y, z) τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας τό μοναδιαίο διάνυσμα \hat{n} μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τή σχέση :

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla} \Phi}{|\vec{\nabla} \Phi|} \quad (3)$$

Εἶναι :

$$\vec{\nabla} \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \Phi = 2x\hat{x} + 2y\hat{y} + 2(z - c)\hat{z} \quad (4)$$

καί

$$|\vec{\nabla} \Phi| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4(z - c)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + (z - c)^2} = 2R \quad (5)$$

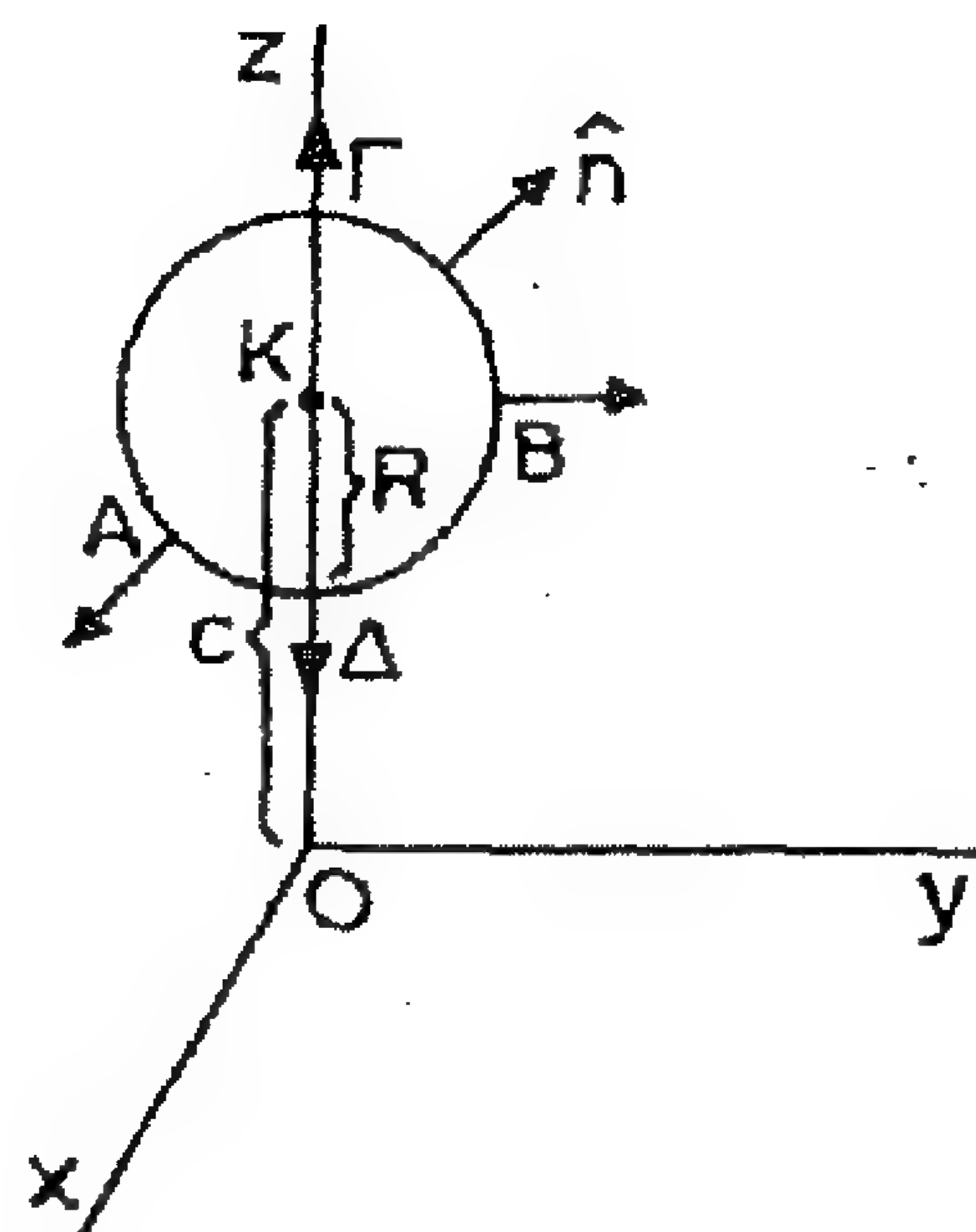
Ἀπό τίς (3), (4) καί (5) ἔχουμε:

$$\boxed{\hat{n} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + (z - c)\hat{z}}{R}} \quad (6)$$

Εἰδικότερα :

α. Στό $A(R, 0, c)$:

$$\hat{n} = \frac{R\hat{x} + 0 + 0}{R} = \hat{x}$$



$$\begin{aligned}
\beta. \text{ Στο σημείο } B(0, R, c) : \quad \hat{n} &= \frac{0 + R\hat{y} + 0}{R} = \hat{y} \\
\gamma. \text{ Στο σημείο } \Gamma(0, c+R) : \quad \hat{n} &= \frac{0 + 0 + R\hat{z}}{R} = \hat{z} \\
\delta. \text{ Στο σημείο } \Delta(0, 0, c-R) : \quad \hat{n} &= \frac{0 + 0 - R\hat{z}}{R} = -\hat{z}
\end{aligned}$$

1.9 'Η σχετική θέση του σημείου \vec{r} ως προς τό σημείο \vec{r}' δύνετα

$$\text{ἀπό τό διάνυσμα :} \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = R \hat{R} \quad (1)$$

Χρησιμοποιώντας τούς τελεστές :

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla}' = \hat{x}' \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{y}' \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{z}' \frac{\partial}{\partial z'} \quad (3)$$

νά υπολογίσετε τίς βαθμύδες : $\vec{\nabla} R$ καί $\vec{\nabla}' R$ όταν $R \neq 0$

Λύση

Στό καρτεσιανό σύστημα είναι :

$$\vec{R} = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z} \quad (4)$$

$$\text{καί} \quad R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (5)$$

"Έχοντας υπόψη ότι $R \neq 0$ υπολογίζουμε :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial x} &= \dots = \frac{x - x'}{R} & \frac{\partial R}{\partial x'} &= \dots = -\frac{x - x'}{R} \\
\frac{\partial R}{\partial y} &= \dots = \frac{y - y'}{R} & \text{καί} & \frac{\partial R}{\partial y'} &= \dots = -\frac{y - y'}{R} \\
\frac{\partial R}{\partial z} &= \dots = \frac{z - z'}{R} & \frac{\partial R}{\partial z'} &= \dots = -\frac{z - z'}{R}
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\vec{\nabla} R = \frac{x-x'}{R} \hat{x} + \frac{y-y'}{R} \hat{y} + \frac{z-z'}{R} \hat{z} = \frac{\vec{R}}{R} = \hat{R} \quad (6)$$

και

$$\vec{\nabla}' R = \frac{-\vec{R}}{R} = -\hat{R} \quad (7)$$

1.10 "Εστω μία συνάρτηση $f(R)$, όπου R τό μέτρο του διανύσματος της προηγούμενης άσκησης. "Αν ή $f(R)$ ελναι συνεχής και παραγωγύσιμη ως προς R , νά προσδιορίσετε τίς βαθμύδες $\vec{\nabla} f(R)$ και $\vec{\nabla}' f(R)$. Ελδικά όταν $f(R) \equiv 1/R$, $R \neq 0$.

Λύση

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(R) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) f(R) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z} \hat{z} = \frac{\partial f}{\partial R} \vec{\nabla} R \end{aligned} \quad (1)$$

Γιά $R \neq 0$ και σύμφωνα μέ τά αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης ελναι :

$$\vec{\nabla} f(R) = \frac{\partial f}{\partial R} \vec{\nabla} R = \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\vec{R}}{R} = \frac{\partial f}{\partial R} \hat{R} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla}' f(R) = \frac{\partial f}{\partial R} \vec{\nabla}' R = -\frac{\partial f}{\partial R} \frac{\vec{R}}{R} = -\frac{\partial f}{\partial R} \hat{R} \quad (3)$$

"Ωστε :

$$\vec{\nabla} f(R) = -\vec{\nabla}' f(R) = \frac{\partial f}{\partial R} \hat{R} \quad (4)$$

Ελδικά :

$$f(R) \equiv 1/R, \quad R \neq 0$$

τότε

$$\frac{\partial f}{\partial R} = -\frac{1}{R^2} \quad (5)$$

και

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) = -\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\hat{R}}{R^2} = -\frac{\vec{R}}{R^3} \quad (6)$$

1.11 Νά προσδιοριστοῦν οἱ προβολές τῶν μοναδιαίων διανυσμάτων τοῦ καρτεσιανοῦ συστήματος $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ πάνω στίς συντεταγμένες καμπύλες τοῦ σφαιρικοῦ συστήματος.

Λύση

Εἶναι :

$$\hat{r} = \frac{\partial \vec{r} / \partial r}{|\partial \vec{r} / \partial r|} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \hat{x} + \frac{\partial y}{\partial r} \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial r} \hat{z} \quad (1)$$

Ἀνάλογες σχέσεις ἰσχύουν καί γιὰ τὰ $\hat{\vartheta}, \hat{\varphi}$.

Ἀλλά

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ὡστε :

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \sin \vartheta \cos \varphi \hat{x} + \sin \vartheta \sin \varphi \hat{y} + \cos \vartheta \hat{z} \\ \hat{\vartheta} &= \cos \vartheta \cos \varphi \hat{x} + \cos \vartheta \sin \varphi \hat{y} - \sin \vartheta \hat{z} \\ \hat{\varphi} &= -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y} \end{aligned} \quad (3)$$

Οἱ προβολές τοῦ \hat{x} πάνω στίς καμπύλες r, ϑ, φ εἶναι :

$$\hat{x} \cdot \hat{r} = \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$\hat{x} \cdot \hat{\vartheta} = \cos \vartheta \cos \varphi$$

$$\hat{x} \cdot \hat{\varphi} = -\sin \varphi$$

Οἱ προβολές τῶν \hat{y} καί \hat{z} πάνω στίς καμπύλες r, ϑ, φ , εἶναι ἀντίστοιχα :

$$\hat{y} \cdot \hat{r} = \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$\hat{z} \cdot \hat{r} = \cos \vartheta$$

$$\hat{y} \cdot \hat{\vartheta} = \cos \vartheta \sin \varphi$$

$$\hat{z} \cdot \hat{\vartheta} = -\sin \vartheta$$

$$\hat{y} \cdot \hat{\varphi} = \cos \varphi$$

$$\hat{z} \cdot \hat{\varphi} = 0$$

1.12 Νά υπολογίσετε τά μεγέθη $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}, \vec{\nabla} u_1, \vec{\nabla} u_2$ καί $\vec{\nabla} u_3$

α) σέ καρτεσιανές β) σέ κυλινδρικές καί γ) σέ σφαιρικές συντεταγμένες.

Λύση

Σύμφωνα μέ τό πρόβλ. 1.2 εἶναι :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = h_i \hat{u}_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Εξάλλου εἶναι :

$$\vec{\nabla} u_1 = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \hat{u}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \hat{u}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \hat{u}_3 \right) u_1 = \frac{\hat{u}_1}{h_1} \quad (2)$$

καί ἀνάλογα :

$$\vec{\nabla} u_2 = \frac{\hat{u}_2}{h_2} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} u_3 = \frac{\hat{u}_3}{h_3} \quad (4)$$

α) Καρτεσιανό (x, y, z) : $h_1 = h_2 = h_3 = 1$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \frac{\hat{x}}{1} = \hat{x} \quad , \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \hat{y} \quad , \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{z}$$

$$\vec{\nabla} x = \hat{x} \quad , \quad \vec{\nabla} y = \hat{y} \quad , \quad \vec{\nabla} z = \hat{z}$$

β) Κυλινδρικό (ρ, φ, z) : $h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = 1$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \hat{\rho} \quad , \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \rho \hat{\varphi} \quad , \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{z}$$

$$\vec{\nabla} \rho = \hat{\rho} \quad , \quad \vec{\nabla} \varphi = \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \quad , \quad \vec{\nabla} z = \hat{z}$$

γ) Σφαιρικό $(r, \vartheta, \varphi) : h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \vartheta$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \hat{r}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = r \hat{\vartheta}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = r \sin \vartheta \hat{\varphi}$$

$$\vec{\nabla} r = \hat{r}, \quad \vec{\nabla} \vartheta = \frac{\hat{\vartheta}}{r}, \quad \vec{\nabla} \varphi = \frac{\hat{\varphi}}{r \sin \vartheta}$$

1.13 "Αν $\vec{A} = \text{σταθ.}$ νά αποδειχτε ότι : $\vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \vec{A}) = \vec{A}$

Λύση

Είναι :

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \quad (1)$$

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad (2)$$

$$\text{και} \quad \vec{r} \cdot \vec{A} = x A_x + y A_y + z A_z \quad (3)$$

Γενικά είναι :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \vec{A}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) (x A_x + y A_y + z A_z) = \\ &= \left(A_x + x \frac{\partial A_x}{\partial x} + y \frac{\partial A_y}{\partial x} + z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{x} + \\ &+ \left(x \frac{\partial A_x}{\partial y} + A_y + y \frac{\partial A_y}{\partial y} + z \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \hat{y} + \\ &+ \left(x \frac{\partial A_x}{\partial z} + y \frac{\partial A_y}{\partial z} + A_z + z \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \hat{z} \end{aligned}$$

Αλλά, αφού τό \vec{A} είναι σταθερό διάνυσμα όλες οι παράγωγοι των προβολών του ως προς x, y, z , είναι μηδέν.

Ωστε : $\vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \vec{A}) = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} = \vec{A}$

1.14 Νά υπολογιστεί το μέγεθος $\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right)$

Λύση

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r^2} & \frac{y}{r^2} & \frac{z}{r^2} \end{vmatrix} = \\ &= \hat{x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{r^2} \right) \right] + \\ &+ \hat{y} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x}{r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{r^2} \right) \right] + \\ &+ \hat{z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{r^2} \right) \right] = \\ &= \hat{x} \left[-\frac{2z}{r^3} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{2y}{r^3} \frac{\partial r}{\partial z} \right] + \hat{y} \left[-\frac{2x}{r^3} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{2z}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \right] + \\ &+ \hat{z} \left[-\frac{2y}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{2x}{r^3} \frac{\partial r}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

Αλλά $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ (2)

και $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$ (3)

Από τις (1) και (3) προκύπτει :

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r^2} = \left(-\frac{2z}{r^3} \frac{y}{r} + \frac{2y}{r^3} \frac{z}{r} \right) \hat{x} + \left(-\frac{2x}{r^3} \frac{z}{r} + \frac{2z}{r^3} \frac{x}{r} \right) \hat{y} +$$

$$+ \left(-\frac{2y}{r^3} \frac{x}{r} + \frac{2x}{r^3} \frac{y}{r} \right) \hat{z} = 0 \cdot \hat{x} + 0 \cdot \hat{y} + 0 \cdot \hat{z} = 0$$

Ωστε :

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r^2} = 0$$

1.15 "Αν $\Phi(\vec{r})$ είναι μία συνάρτηση συνεχής και παραγωγίσιμη, να αποδειχτεί ότι :

$$\text{rot}(\Phi \text{ grad } \Phi) = 0$$

(Η απόδειξη ως γίνεται στο καρτεσιανό σύστημα)

Λύση

$$\text{rot}(\Phi \text{ grad } \Phi) = \vec{\nabla} \times (\Phi \vec{\nabla} \Phi) = \vec{\nabla} \times \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{x} + \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{y} + \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{z} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{x} \left(\Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) +$$

$$+ \hat{y} \left(\Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) +$$

$$+ \hat{z} \left(\Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)$$

Αλλά αφού Φ είναι συνεχής, ισχύει :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} \quad \kappa. \tau. \lambda.$$

Άρα :

$$\vec{\nabla} \times (\Phi \vec{\nabla} \Phi) = 0$$

1.16 Αν $\vec{A} = \vec{A}(t)$, όπου t μία παράμετρος, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \vec{A} \times \frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} dt$$

Λύση

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{A} \times \frac{d\vec{A}}{dt} \right) = \vec{A} \times \frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} + \frac{d\vec{A}}{dt} \times \frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{A} \times \frac{d^2 \vec{A}}{dt^2}$$

Όστε :

$$\int \vec{A} \times \frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} dt = \int \frac{d}{dt} \left(\vec{A} \times \frac{d\vec{A}}{dt} \right) dt = \vec{A} \times \frac{d\vec{A}}{dt}$$

1.17 Να αποδείξετε ότι :

$$\int_V \vec{\nabla} \Phi dV = \oint_S \Phi d\vec{S} \quad (1)$$

όπου S είναι μία κλειστή επιφάνεια, που περιორύζει τον όγκο V και $\Phi = \Phi(\vec{r})$ μία φυσική συνάρτηση της θέσης.

Λύση

Σύμφωνα με το θεώρημα του Gauss είναι :

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (2)$$

Έστω ένα διάνυσμα $\vec{B} = \text{σταθ.}$ καί ὅτι $\vec{A} = \phi \vec{B}$. Τότε

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{B}) = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{B} + \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \phi \quad (3)$$

Αλλά $(\phi \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot (\phi d\vec{S}) \quad (4)$

Εφαρμόζοντας τή (2), τώρα, έχουμε :

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, dV = \int_V \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \phi \, dV = \oint_S \vec{B} \cdot \phi d\vec{S} \quad (5)$$

ή

$$\vec{B} \cdot \left[\int_V \vec{\nabla} \phi \, dV - \oint_S \phi d\vec{S} \right] = 0 \quad (6)$$

Αλλά τό \vec{B} είναι σταθερό καί αὐθαίρετο. Επομένως γιά νά ἰσχύει ἡ (6) πρέπει :

$$\int_V \vec{\nabla} \phi \, dV = \oint_S \phi d\vec{S} \quad (7)$$

1.18 Νά προσδιορίσετε δύο μοναδιαα διανύσματα , πού νά εἶναι κάθετα στήν εὐθεία, πού ἐνώνει τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων μέ τό σημεῖο $(x_1, y_1, 0)$ καί νά βρίσκονται πάνω στό ἐπίπεδο xy .

$$\left(\text{'Απ.} \quad \pm \frac{y_1 \hat{x} - x_1 \hat{y}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \right)$$

1.19 Τό διάνυσμα, πού ἔχει ἀρχή τό σημεῖο $(\rho=2, \varphi=\pi, z=0)$ καί τέλος τό σημεῖο $(\rho=3, \varphi=\frac{\pi}{2}, z=1)$, νά ἐκφραστεῖ

α. στό ὀρθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

β. στό κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (θυμηθεῖτε ὅτι τά $\hat{\rho}$ καί $\hat{\varphi}$ ἐξαρτῶνται ἀπό τό φ , ἀποφασίστε ποιά $\hat{\rho}$ καί $\hat{\varphi}$ θά χρησιμοπολήσετε καί συμβολίστε τά ἀνάλογα).

$$\left(\text{'Απ.} \quad \alpha) \quad 2\hat{x} + 3\hat{y} + \hat{z} \quad \beta) \quad -2\hat{\rho}(\pi) - 3\hat{\varphi}(\pi) + \hat{z} \right)$$

1.20 Νά μετασχηματίστε τό διάνυσμα $\vec{A} = x\hat{x} + y\hat{y}$ σέ κυλινδρικές συντεταγμένες.

$$\left(\text{'Απ.} \quad \vec{A} = \sqrt{x^2 + y^2} \hat{\rho} \quad , \text{ὅπου} \quad \hat{\rho} = \hat{\rho}(\arctan \frac{y}{x}) \right)$$

1.21 Ἡ θέση ἑνός ὑλικοῦ σημείου σέ κυλινδρικές συντεταγμένες δίνεται σέ κάθε χρονική στιγμή t ἀπό τό διάνυσμα $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$ ὅπου $\rho = \rho(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ καί $z = z(t)$.

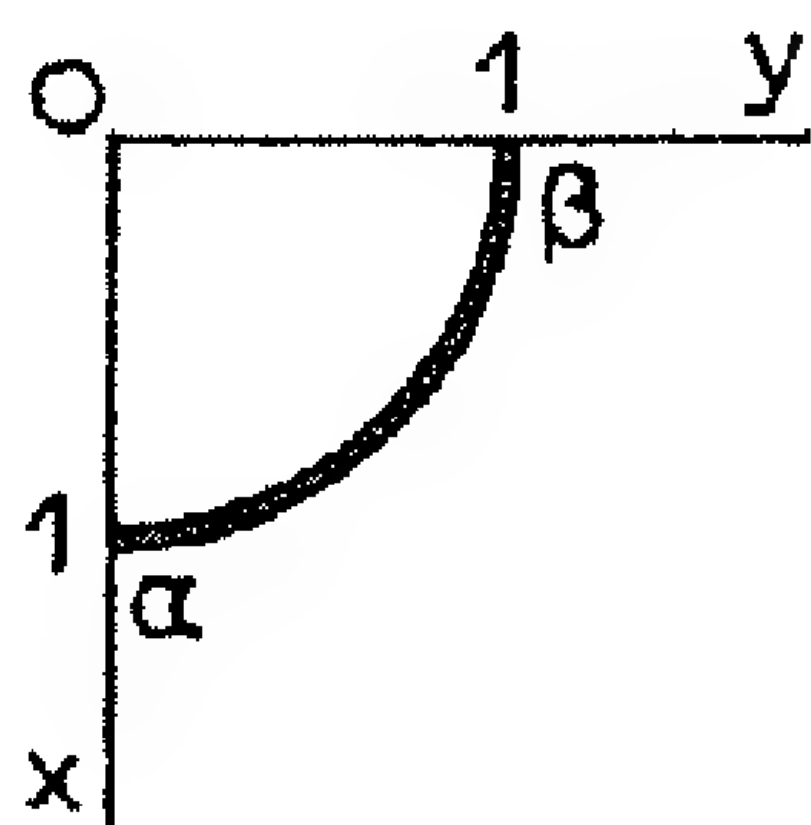
α. Νά προσδιορίσετε τήν ταχύτητα $\vec{v}(t)$ τοῦ σημείου.

β. Νά προσδιορίσετε τήν ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}(t)$ τοῦ σημείου.

('Απ. α) $\vec{v} = \hat{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \rho \hat{\phi} \frac{d\phi}{dt} + \hat{z} \frac{dz}{dt}$

β) $\vec{\gamma} = \hat{\rho} \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] + \hat{\phi} \left[\rho \frac{d^2\phi}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\phi}{dt} \right] + \hat{z} \frac{d^2z}{dt^2}$

1.22 Νά υπολογίσετε τό ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} \vec{A} \cdot d\vec{l}$ ὅπου $\vec{A} = y\hat{x} - x\hat{y}$ μέ δρόμο ολοκλήρωσης τό τεταρτοκύκλιο πού δείχνει τό σχῆμα .



('Απ. $-\frac{\pi}{2}$)

1.23 Νά υπολογίσετε τό ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} \hat{\rho} d\phi$ μέ δρόμο ολοκλήρωσης τό τεταρτοκύκλιο $\widehat{\alpha\beta}$ τοῦ προηγούμενου προβλήματος.

('Απ. $\hat{x} + \hat{y}$)

1.24 Νά υπολογίσετε τό ἐπικαμπύλιο ολοκλήρωμα :

$$\vec{Q} = \int_{\alpha}^{\beta} (\cos \phi \hat{\rho} + \sin \phi \hat{\phi}) d\phi$$

μέ δρόμο ολοκλήρωσης τόν ἴδιο μέ τῶν δύο προηγούμενων προβλημάτων.

('Απ. $\vec{Q} = \hat{y}$)

1.25 Νά ἀποδείξετε ὅτι $\oint_S \cos \vartheta \hat{r} \cdot d\vec{S} = 0$ ἄν S εἶναι ὁποιαδήποτε σφαῖρα μέ κέντρο τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

1.26 Νά υπολογίσετε τό ολοκλήρωμα $\vec{Q} = \int_V \hat{r} \sin\varphi dV$ όπου V ό όγκος μιᾶς σφαίρας μέ κέντρο τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί μοναδιαία ἀκτίνα.

$$(\text{'Απ. } \vec{Q} = \frac{\pi}{6} \hat{y})$$

1.27 Νά προσδιορίσετε τό ολοκλήρωμα $I = \oint_S x\hat{x} \cdot d\vec{S}$ όπου S ή ἐπιφάνεια ενός κύβου μέ μοναδιαία ἀκμή, μέ τή μιᾶ του κορυφή στήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί τίς τρεῖς ἀκμές, πού συγκλίνουν στήν κορυφή αὐτή, πάνω στούς θετικούς καρτεσιανούς ἡμιάξονες.

$$(\text{'Απ. } I = 1)$$

1.28 Ἐστω ό κύκλος

$$x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0.$$

Νά υπολογίσετε τό ἐπικαμπύλιο ολοκλήρωμα $Q = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$ όπου \vec{A} εἶναι τό διανυσματικό πεδίο

$$\vec{A} = 2y\hat{x} + 3yz\hat{y} + y\hat{z}$$

καί C ή περιφέρεια τοῦ προαναφερμένου κύκλου διαγραφόμενη κατὰ τή θετική φορά τῆς γωνίας φ . Ὅπως θά προκύψει, ή ἀπόδειξη δύναται εὐκολότερα στό κυλινδρικό σύστημα.

$$(\text{'Απ. } Q = - \int_0^{2\pi} 8 \sin^2\varphi d\varphi = -8\pi)$$

1.29 Νά προσδιορίσετε τό μέγιστο ρυθμό μεταβολῆς τοῦ μονόμε-
τρου πεδίου $\Phi = x^2 + y^2$ σέ κάθε σημείο (x, y, z) , καθώς καί τή διεύθυνση \hat{n} τοῦ μέγιστου αὐτοῦ ρυθμοῦ στό σημείο $(1, 2, 0)$.

$$(\text{'Απ. } |\vec{\nabla}\Phi| = \sqrt{4x^2 + 4y^2}, \quad \hat{n} = 0,45\hat{x} + 0,89\hat{y})$$

1.30 Νά εξετάσετε αν τό διανυσματικό πεδίο $\vec{A} = 3xy^2\hat{x} + 5z\hat{y} + xz\hat{z}$ έχει πηγή ή καταβόθρα στό σημείο $(1,3,2)$.

('Απ. 'Αφοῦ $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 10 > 0$ στό σημείο αὐτό ὑπάρχει πηγή τοῦ \vec{A}) .

1.31 Τό διάνυσμα θέσης τοῦ σημείου (x,y,z) εἶναι ὅπως ξέρουμε $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, προσδιορίστε τήν ἀπόκλιση $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$ καί δεῦξτε ὅτι

$$\oint_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = 3V$$

ὅπου V ὁ ὄγκος πού περιορίζει μιά αὐθαίρετη κλειστή ἐπιφάνεια S

('Απ. $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$)

1.32 "Ας θεωρήσουμε ἓνα διανυσματικό πεδίο \vec{A} πού σέ κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων ἐκφράζεται $\vec{A} = \rho\hat{\phi}$. Στή θέση $\rho = 0$ νά προσδιορίσετε τόν $\text{rot}\vec{A}$ θεωρώντας τον ὡς τή μέγιστη κυκλοφορία τοῦ \vec{A} ἀνά μονάδα ἐπιφάνειας μέ ὑπολογισμό τοῦ $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$ πάνω σέ μιά περιφέρεια μέ ἀκτίνα α , στό ἐπίπεδο $\rho\phi$, καί παίρνοντας τό ὄριο γιά $\alpha \rightarrow 0$.

Ἐπαληθεύσετε τό ἀποτέλεσμα ὑπολογίζοντας τόν $\text{rot}\vec{A}$ μέ τή βοήθεια τῆς γνωστῆς ὀρίζουσας.

('Απ. $\text{rot}\vec{A} = 2\hat{z}$)

1.33 "Αν $\vec{A} = A_0\hat{x}\sin\omega t$ καί $\vec{B} = B_0\hat{x}\sin(\omega t + \varphi)$, νά προσδιορίσετε τή χρονική μέση τιμή $\langle \vec{A} \cdot \vec{B} \rangle$.

('Απ. $\langle \vec{A} \cdot \vec{B} \rangle = \frac{1}{2} A_0 B_0 \cos\varphi$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 Τό βήτατρο είναι επιταχυντής ηλεκτρονίων, πού εκμεταλλεύεται τό ηλεκτρικό πεδίο, πού επάγεται από τή χρονική μεταβολή ενός μαγνητικού πεδίου στό χώρο. "Αν υποτεθεῖ ὅτι ἡ τροχιά τῶν επιταχυνόμενων ηλεκτρονίων είναι περίπου κυκλική καί ὀριζόντια καί ἔχει ἀκτίνα r καί ὅτι τό μαγνητικό πεδίο ἔχει τή μορφή:

$$\vec{B} = C t \hat{z}$$

ὅπου $C = \text{σταθ.}$, νά προσδιοριστοῦν :

- τό ηλεκτρικό πεδίο, πού ἀντιμετωπίζουν τά ηλεκτρόνια
- ἡ διαφορά δυναμικοῦ ΔV , πού επάγεται σέ κάθε διαγραφή τῆς τροχιάς τοῦ ηλεκτρονίου καί
- ἡ ἀντίστοιχη αὔξηση ΔU τῆς ἐνέργειας τοῦ ηλεκτρονίου.

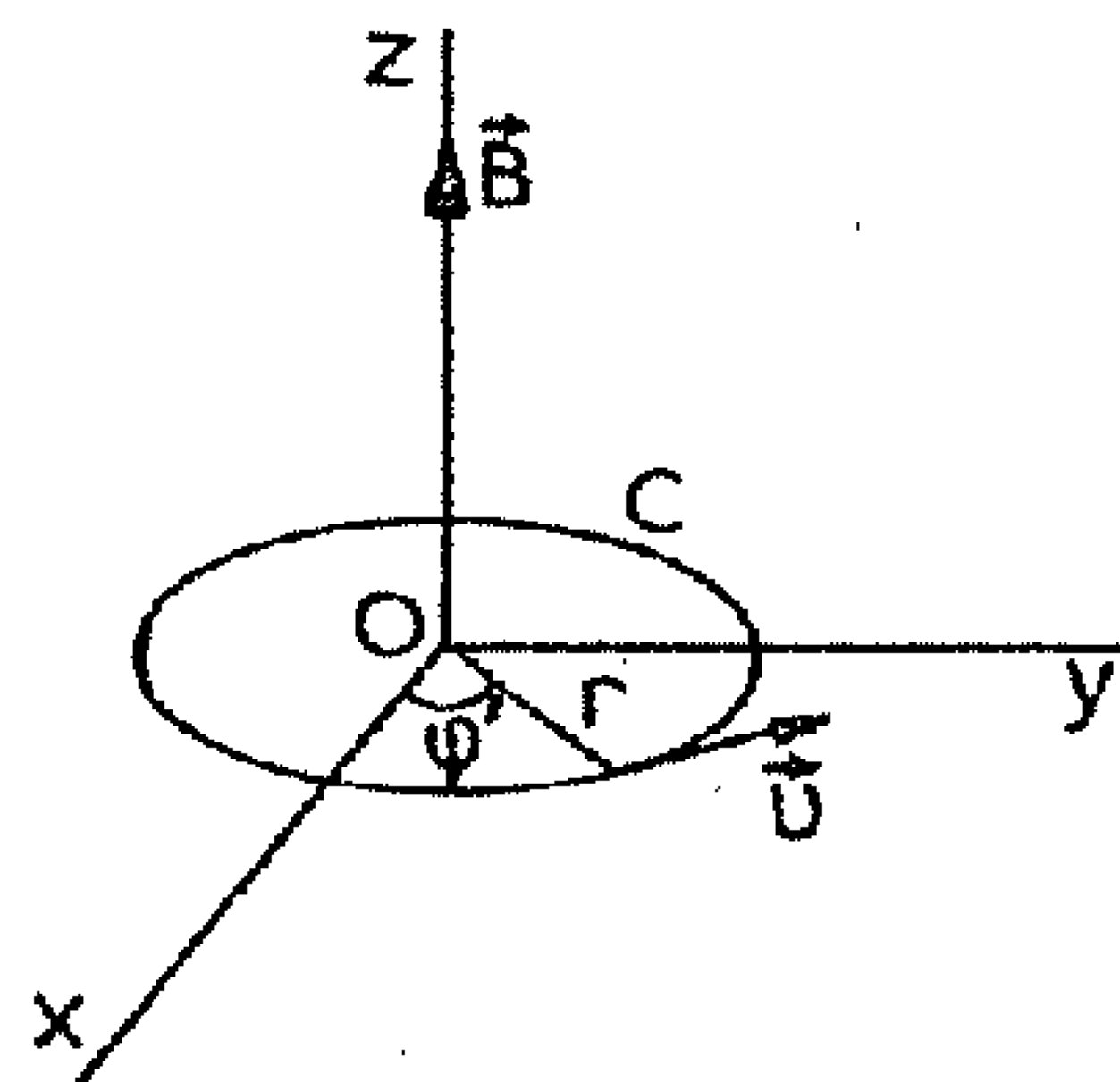
Ἐφαρμογή : $C = 10^3 \text{ Weber m}^2 \text{sec}^{-1}$, $r = 0,01 \text{ m}$

Λύση

- Ἀπό τήν δεύτερη ἐξίσωση τοῦ Maxwell σέ ολοκληρωτική μορφή ἔχουμε :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (1)$$

$$\text{Ἀλλά} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = C \hat{z} \quad \text{καί} \quad d\vec{S} = \hat{z} dS \quad (2)$$



Ωστε $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} r E_\varphi d\varphi = E_\varphi 2\pi r = -C\pi r^2$ (3)

ή $E_\varphi = -\frac{r}{2} C$ (4)

β. Είναί :

$$V_2 - V_1 = \Delta V = \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^{2\pi} r E_\varphi d\varphi = -E_\varphi \cdot 2\pi r$$
 (5)

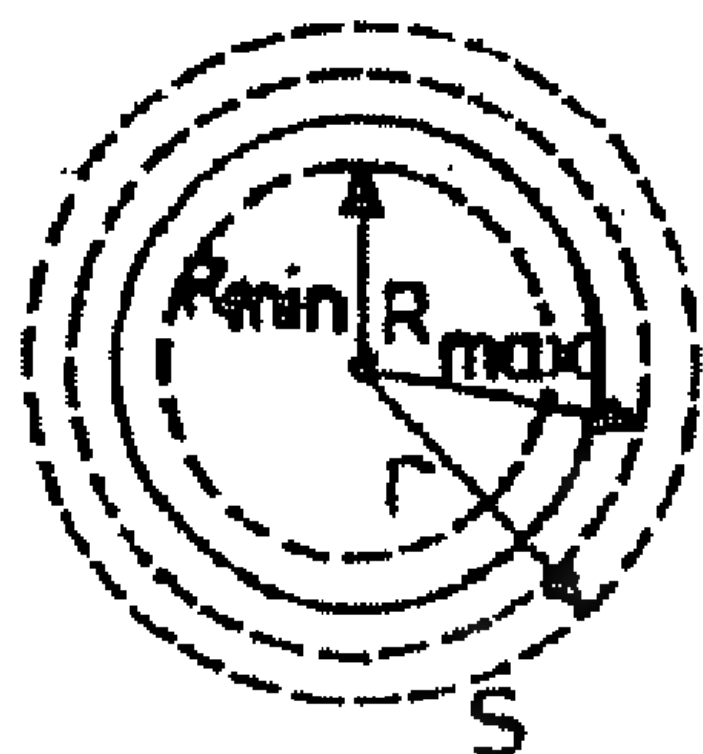
ή $\Delta V = C\pi r^2$ (6)

γ. $\Delta U = e \Delta V = C e \pi r^2$ (7)

Εφαρμογή : $E_\varphi = -5 \frac{V}{m}$, $\Delta V = 0,314 V/\text{τροχιά}$, $\Delta U = 0,314 eV/\text{τροχιά}$

2.2 Ένα αγωγικό σφαιρικό μπαλόνι είναι φορτισμένο με σταθερό φορτίο Q . Η ακτίνα του μπαλονιού αυξομειώνεται ήμειονικά από μιιά ελάχιστη τιμή R_{\min} ως μιιά μέγιστη R_{\max} . Θά μπορούσε κανένας νά υποθέσει ότι μέ τόν τρόπο αυτό θά παράγεται ένα σφαιρικά συμμετρικό ηλεκτρομαγνητικό κύμα, πού θά διαδίδεται ακτινικά. Νά αποδείξετε ότι δέν συμβαίνει κάτι τέτοιο υπολογίζοντας τό ηλεκτρικό πεδίο E σέ κάποια απόσταση r πέρα από τήν R_{\max} ($r > R_{\max}$).

Λύση



Λόγω τής σφαιρικής συμμετρίας τό ηλεκτρικό πεδίο στή θέση \vec{r} έχει μόνο ακτινική συνιστώσα :

$$\vec{E} = E_r \hat{r} \quad (1)$$

Από την τρίτη εξίσωση του Maxwell έχουμε :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \quad (2)$$

Εφαρμόζοντάς την για την επιφάνεια $S = 4\pi r^2$ και τον όγκο V που αυτή περικλείει, και λαβαίνοντας υπόψη ότι :

$$d\vec{S} = \hat{r} dS \quad (3)$$

βρίσκουμε :

$$\epsilon \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q \quad \text{ή}$$

$$\epsilon \oint_S E_r \hat{r} \cdot \hat{r} dS = Q \quad \text{ή}$$

$$\epsilon E_r \cdot 4\pi r^2 = Q \quad \text{όποτε} \quad E_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \quad (4)$$

$$\text{Δηλαδή :} \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{r} \quad (5)$$

Από την (5) φαίνεται ότι η ένταση \vec{E} του πεδίου στο τυχαίο r ($r > R_{\max}$) δεν εξαρτάται παρά μόνο από το σταθερό φορτίο Q του μπαλονιού, είναι χρονικά ανεξάρτητη, και προφανώς δεν αντιστοιχεί σε κύμα.

2.3 Έστω ότι σε έναν περιορισμένο κενό χώρο (ϵ_0, μ_0) υπάρχει ένα ηλεκτροστατικό πεδίο;

$$\vec{E} = E_0 (\sin x \cdot \hat{x} + \cos x \cdot \hat{y}) e^{-y} \quad (1)$$

Νά υπολογίσετε την πυκνότητα φορτίου στα διάφορα σημεία \vec{r} του χώρου αυτού.

Λύση

Από την 3^η εξίσωση του Maxwell έχουμε :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (2)$$

Ωστε για οποιαδήποτε θέση $\vec{r}(x, y, z)$ του χώρου που μελετάμε είναι

$$\rho(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad (3)$$

Επειδή όμως

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z} \quad (4)$$

όπου: $E_x = E_0 \sin x e^{-y}$, $E_y = E_0 \cos x e^{-y}$, $E_z = 0$

είναι $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = E_0 \cos x e^{-y} + (-E_0 \cos x e^{-y}) = 0$

Δηλαδή: $\rho(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

Δηλαδή ο χώρος αυτός δεν πρέπει να περιέχει φορτία.

2.4 Ένας μακρύς κυλινδρικός αγωγός με ακτίνα a και ειδική αγωγιμότητα $\sigma = \infty$ μεταφέρει ηλεκτρικό ρεύμα $I = I_0 \sin \omega t$.

Νά προσδιορίσετε σαν συνάρτηση της ακτίνας r ($r < a$, $r > a$)

α. την πυκνότητα ρεύματος αγωγής $J(r)$

β. την πυκνότητα ρεύματος μετατόπισης $J_d(r)$ και

γ. την ένταση του μαγνητικού πεδίου $B(r)$.

(Απ. $J = (I_0/\pi a^2) \sin \omega t$ για $0 \leq r \leq a$ και $J = 0$ για $r > a$

α. $J_d = 0$ για όλα τα r

β. $B = I/2\pi\mu_0^{-1}r$ για $r \geq a$

γ. $B = Ir/2\pi\mu_0^{-1}a^2$ για $0 < r \leq a$)

2.5 Σ' έναν επίπεδο πυκνωτή μέ κυκλικούς όπλισμούς , πού έχουν ακτίνα a καί απόσταση d μεταξύ τους, εφαρμόζεται ή τάση $V = V_0 \sin \omega t$. Τό διηλεκτρικό του πυκνωτη είναι τό κενό. Νά προσδιοριστεί σάν συνάρτηση τής ακτίνας r ($r < a$)

α. ή πυκνότητα ρεύματος μετατόπισης $J_d(r)$ καί

β. ή μαγνητική δέγερση $H(r)$. Υποθέστε ότι $d \ll a$.

(Απ. α. $J_d = (\epsilon_0 \omega V_0 / d) \cos \omega t$

β. $H_\phi = r (\epsilon_0 \omega V_0 / 2d) \cos \omega t$)

2.6 Μέσα σ' έναν άγώγιμο κύλινδρο διαδίδεται μία κυλινδρική ήλεκτρονική δέσμη, πού αποτελείται από σταθερή πυκνότητα φορτίου κινούμενη μέ σταθερή άξονική ταχύτητα $v_0 = 10^7$ m/sec. Αν ή ακτίνα τής δέσμης είναι $a = 1$ mm καί τό όλικό ρεύμα $I_0 = 10$ mA, νά υπολογίσετε τό ήλεκτρικό πεδίο \vec{E} μέσα κι έξω από τήν ήλεκτρονική δέσμη. Αλλάζει τό \vec{E} αν αλλάξει ή διάμετρος του άγώγιμου κυλίνδρου ;

(Απ. $E_r = -18 \cdot 10^6 r$ για $r \leq a$

$E_r = -\frac{18}{r}$ για $r > a$

Τό \vec{E} δέν εξαρτάται από τή διάμετρο του κυλίνδρου)

2.7 Έστω μία σφαιρική κατανομή φορτίου στόν έλεύθερο χώρο πού χαρακτηρίζεται από τήν πυκνότητα φορτίου

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) & , \quad r \leq a \\ 0 & , \quad r > a \end{cases}$$

όπου a ή ακτίνα τής σφαίρας καί ρ_0 σταθερά. Νά προσδιορίσετε τήν ένταση του ήλεκτρικού πεδίου για όλες τίς τιμές του r .

$$\begin{aligned}
 (\text{'A}\pi. \quad E_r = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right) \quad \gamma\lambda\acute{\alpha} \quad r \leq a \\
 E_r = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{2}{15} \frac{a^3}{r^2} \quad \gamma\lambda\acute{\alpha} \quad r > a \quad)
 \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 Νά αποδείξετε ότι τά πεδία \vec{E} και \vec{B} παραμένουν τά ίδια αν αντί των δυναμικών \vec{A} και Φ χρησιμοποιήσουμε τά δυναμικά $\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda$ και $\Phi' = \Phi + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$, όπου $\Lambda = \Lambda(\vec{r}, t)$ ένα αόθαίρετο, αρχικά, μονόμετρο πεδίο. Ποιά μορφή παίρνει τότε η συνθήκη του Lorentz και τί συνεπάγεται γιά τό πεδίο Λ ;

Λύση

Ισχύουν οι σχέσεις :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2)$$

και η συνθήκη του Lorentz :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sigma \mu \Phi = 0 \quad (3)$$

Θεωρώντας τά νέα δυναμικά έχουμε :

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Lambda = \vec{\nabla} \times \vec{A} - 0 = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\vec{\nabla} \Phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla} \Phi - \vec{\nabla} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \Lambda = \\ &= -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\nabla} \Lambda}{\partial t} - \frac{\partial \vec{\nabla} \Lambda}{\partial t} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \end{aligned} \quad (5)$$

Άρα :

$$\left. \begin{aligned} \vec{B}' &= \vec{B} \\ \vec{E}' &= \vec{E} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Η νέα μορφή της συνθήκης του Lorentz θα είναι :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \epsilon \mu \frac{\partial \Phi'}{\partial t} + \sigma \mu \Phi' = 0 \quad (7)$$

$$\eta \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} - \vec{\nabla} \Lambda) + \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) + \sigma \mu \left(\Phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) = 0 \quad (8)$$

$$\eta \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sigma \mu \Phi) - \nabla^2 \Lambda + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

Καί χρησιμοποιώντας καί τήν (3) έχουμε:

$$\nabla^2 \Lambda - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

Ωστε, τό αρχικά αὐθαίρετο Λ πρέπει νά ικανοποιεῖ τήν (10) πού εἶναι ὁμογενής διαφορική ἐξίσωση κύματος. Τό Λ ἀναφέρεται συνήθως σάν συμβιβαστικό μέτρο τοῦ Lorentz (Lorentz gauge) καί ὁ μετασχηματισμός σάν μετασχηματισμός μέτρου (gauge Transformation).

3.2 Νά ἀποδείξετε ὅτι τό στατικό διανυσματικό δυναμικό πού δύναται ἀπό τή σχέση :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{4\pi\mu^{-1}R} dV' \quad (1)$$

ὅπου $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ ἔχει μηδενική ἀπόκλιση, εἶναι δηλ. σωληνοειδές πεδίο. Στή συνέχεια νά διερευνήσετε ἂν τό γεγονός αὐτό συμβιβάζεται μέ τή συνθήκη τοῦ Lorentz στίς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

α. στήν περίπτωση μέσου χωρίς ἀπώλειες ($\sigma = 0$)

β. στήν περίπτωση, πού τά ρεύματα πηγῶν $\vec{J}(\vec{r}')$ εἶναι ρεύματα ἀγωγῆς, καί ὁ ὑπόλοιπος χώρος ἠλεκτρικά οὐδέτερος.

Υ. στην περίπτωση, που $\sigma \neq 0$ και $\Phi(\vec{r}) \neq 0$

Λ ύ σ η

Θέλουμε ν' αποδείξουμε ότι:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (2)$$

έπειδή
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \quad (3)$$

από την (1) έχουμε

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{4\pi\mu^{-1}} \int_V \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right] dV' \quad (4)$$

Για κάθε διανυσματικό πεδίο \vec{C} και κάθε μονόμετρο πεδίο u ισχύει η ταυτότητα :

$$\vec{\nabla} \cdot (u\vec{C}) = \vec{\nabla} u \cdot \vec{C} + u \vec{\nabla} \cdot \vec{C} \quad (5)$$

όποτε

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right] = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \vec{J}(\vec{r}') + \frac{1}{R} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}') \quad (6)$$

Αλλά είναι:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}') = 0 \quad (7)$$

γιατί το $\vec{J}(\vec{r}')$ δεν εξαρτάται από το \vec{r} . Δηλαδή :

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right] = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \vec{J}(\vec{r}') \quad (8)$$

Αλλά ισχύει

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) = -\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right) \quad (9)$$

(βλ. προβλ. 1.10 σχέση (6))

Από τις (4) , (8) και (9) έχουμε :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{4\pi\mu^{-1}} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right) dV' \quad (10)$$

Σύμφωνα μέ την (5) είναι :

$$\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \vec{J}(\vec{r}') \right) = \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \vec{J}(\vec{r}') + \frac{1}{R} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}') \quad (11)$$

Επειδή όμως η κατανομή των ρευμάτων $\vec{J}(\vec{r}')$ είναι χρονικά αμετάβλητη, θα πρέπει για κάθε όγκο V' που περικλείει τό σημείο πηγής \vec{r}' , τό συνολικό εισερχόμενο ρεύμα νά είναι ἴσο μέ τό έξερχόμενο. Αν δηλ. S' ή επιφάνεια, που περιορίζει τόν όγκο V' ἔχουμε :

$$\oint_{S'} \vec{J}(\vec{r}') \cdot \hat{n} dS' = \int_{V'} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}') dV' = 0 \quad (12)$$

Επειδή ό όγκος V' είναι αὐθαίρετος, για νά ισχύει ή (12) πρέπει :

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}') = 0 \quad (13)$$

Από τίς (11) καί (13) ἔχουμε :

$$\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{1}{R} \vec{J}(\vec{r}') \right) = \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \vec{J}(\vec{r}') \quad (14)$$

Από τίς (10) καί (14) ἔχουμε :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = - \frac{1}{4\pi\mu^{-1}} \int_V \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) dV' = - \frac{1}{4\pi\mu^{-1}} \oint_S \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \hat{n} dS' \quad (15)$$

όπου V είναι όλος ό χώρος, που περιέχει πηγές. Τόν όγκο αυτό μπορούμε νά τόν πάρουμε τόσο μεγάλο, ὥστε νά περιλαμβάνει όλες τίς πηγές καί πάνω στήν επιφάνεια S νά είναι $\vec{J} = 0$.

Τότε θά είναι :

$$\oint_S \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \hat{n} dS' = 0 \quad (16)$$

Ωστε :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (17)$$

Η συνθήκη τοῦ Lorentz είναι :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mu \sigma \Phi = 0 \quad (18)$$

πού για τή στατική περίπτωση γίνεται :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu \sigma \Phi = 0 \quad (19)$$

α. Σέ μέσο χωρίς απώλειες, όπου $\sigma = 0$ ή συνθήκη (19) δύνει:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (20)$$

Δηλαδή τό αποτέλεσμα (17) συμβιβάζεται, για τήν περίπτωση τέτοιου υλικού, μέ τή συνθήκη του Lorentz.

β. Στήν περίπτωση αυτή είναι :

$$\Phi(\vec{r}) = 0 \quad (21)$$

καί ή (19) δύνει :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (22)$$

Δηλαδή καί πάλι τό αποτέλεσμα συμβιβάζεται μέ τή συνθήκη του Lorentz.

γ. Στήν περίπτωση αυτή ή (19) δύνει :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu \sigma \Phi \quad (23)$$

Δηλαδή στήν περίπτωση αυτή ή (17) δέν συμβιβάζεται μέ τή συνθήκη του Lorentz. "Ας ζητήσουμε πώς πρέπει νά τροποποιηθεῖ ή (1) ὥστε ή περίπτωση γ νά συμβιβάζεται μέ τή συνθήκη του Lorentz :

Χρησιμοποιώντας τό μετασχηματισμό μέτρου του Lorentz

$$\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \Lambda \quad (24)$$

καί απαιτώντας νά ισχύει ή (23) ἔχουμε ὅτι τό συμβιβαστικό μέτρο $\Lambda(\vec{r})$ (Lorentz gauge) του Lorentz, πρέπει νά ικανοποιεῖ τήν ἐξίσωση .

$$\nabla^2 \Lambda = \mu \sigma \Phi \quad (25)$$

"Ωστε στήν περίπτωση αυτή ή (1) ισχύει τροποποιημένη:

$$\vec{A}' = \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{4\pi R \mu^{-1}} dV' - \vec{\nabla} \Lambda \quad (26)$$

όπου η Λ προκύπτει από την (25) και ισχύει

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = -\mu \sigma \Phi \quad (27)$$

όπως προβλέπει η συνθήκη του Lorentz.

3.3 Έστω ένα ηλεκτρικό δίπολο, που έχει σταθερή ηλεκτρική ροπή \vec{p} . Νά προσδιοριστούν :

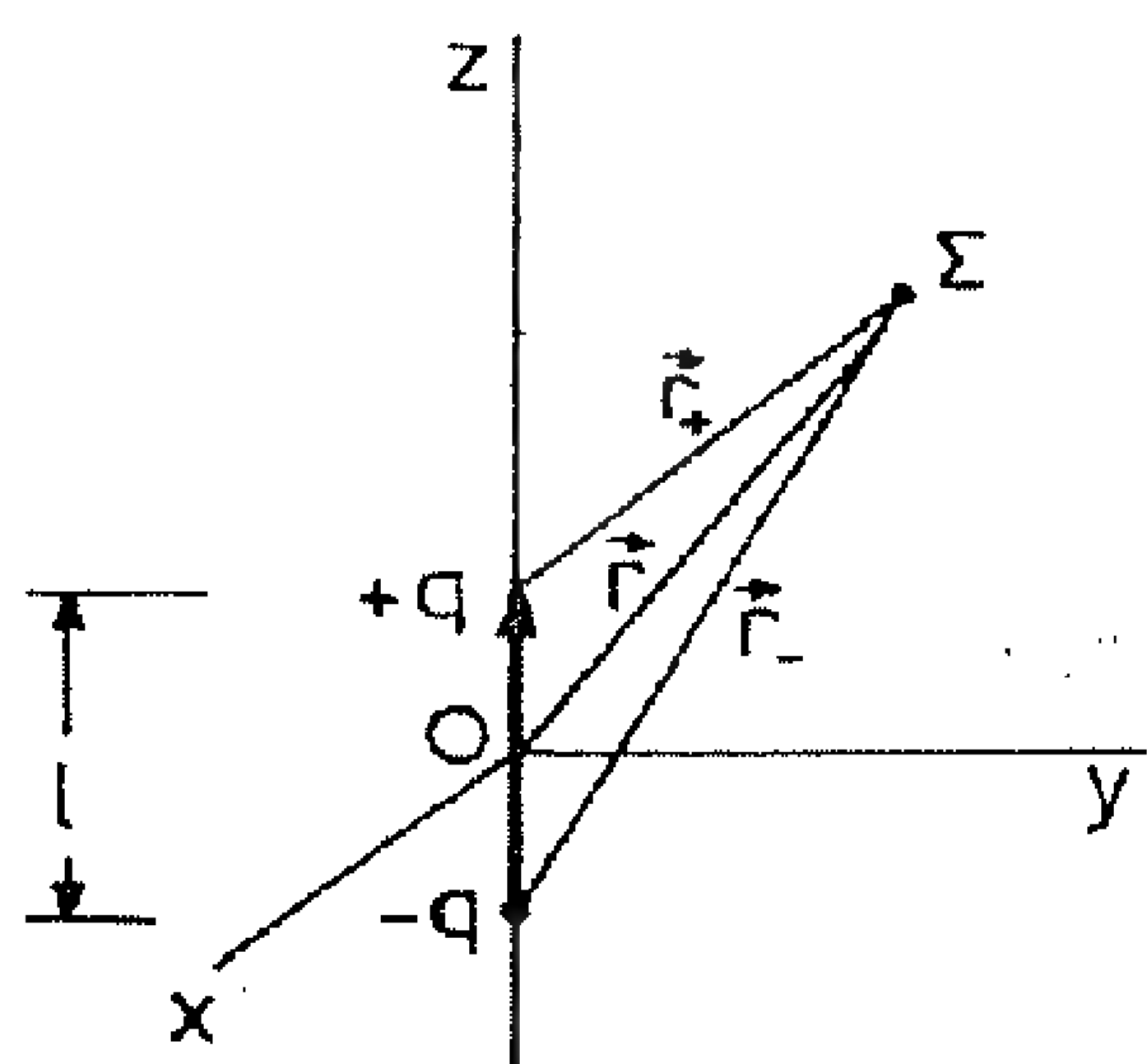
α. Τό δυναμικό $\Phi(\vec{r})$ σε κάποια θέση \vec{r} , μακρινή σε σχέση με τις διαστάσεις του διπόλου (πάρτε ως αρχή των αξόνων τό κέντρο του διπόλου και ως κατεύθυνση του διπόλου την \hat{z}).

β. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}(\vec{r})$ και η ηλεκτρική διέγερση $\vec{D}(\vec{r})$ (ή δηλ. σταθερά του μέσου είναι ϵ)

γ. Η εξίσωση και η μορφή των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών και

δ. Η εξίσωση και η μορφή των ισοδυναμικών επιφανειών.

Λύση



Σχ. 1

α. Τό δυναμικό στη θέση \vec{r} είναι τό άθροισμα των δυναμικών, που δημιουργεί χωριστά καθένα από τά δύο φορτία $(+q, -q)$ του διπόλου :

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_+(\vec{r}) + \Phi_-(\vec{r}) \quad (1)$$

ή

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \quad (2)$$

Αληθεύουν οι σχέσεις :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3)$$

$$r_+^2 = x^2 + y^2 + \left(z - \frac{l}{2} \right)^2 \quad (4)$$

$$r_-^2 = x^2 + y^2 + \left(z + \frac{l}{2} \right)^2 \quad (5)$$

Υποθέτουμε ότι

$$l \ll r$$

(6)

έχουμε :

$$r_+^2 = r^2 - zl + \frac{l^2}{4} \simeq r^2 - zl = r^2 \left(1 - \frac{zl}{r^2}\right) \quad (7)$$

$$r_-^2 = r^2 + zl + \frac{l^2}{4} \simeq r^2 + zl = r^2 \left(1 + \frac{zl}{r^2}\right) \quad (8)$$

Ωστε

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon r} \left[\left(1 - \frac{zl}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{zl}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (9)$$

Από την (6) προκύπτει ότι:

$$zl \ll r^2 \quad (10)$$

$$\left(1 - \frac{zl}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{zl}{r^2} \quad (11)$$

$$\left(1 + \frac{zl}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{zl}{r^2} \quad (12)$$

Ωστε

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon r} \left(\frac{1}{2} \frac{zl}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{zl}{r^2} \right) = \frac{qlz}{4\pi\epsilon r^3} \quad (13)$$

Αλλά είναι

$$z = r \cos \vartheta \quad \text{και} \quad \vec{p} = ql\vec{1} \quad (14)$$

Ωστε :

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \cos \vartheta}{4\pi\epsilon r^2}} \quad (15)$$

ή ακόμα

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon r^3} \quad (16)$$

ή έπειδή

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (17)$$

γράφουμε :

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{-\vec{p}}{4\pi\epsilon} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (18)$$

β. Θα εργαστούμε σε σφαιρικές συντεταγμένες και θα προσδιορίσουμε το $\vec{E}(\vec{r})$ ως :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) \quad (19)$$

Στις σφαιρικές συντεταγμένες είναι:

$$\vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \hat{\vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \quad (20)$$

Όστε :

$$\vec{E} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \hat{\vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \right) \quad (21)$$

Από τη (15) έχουμε:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = - \frac{p \cos \vartheta}{2 \pi \epsilon r^3} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = - \frac{p \sin \vartheta}{4 \pi \epsilon r^2} \quad (23)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0 \quad (24)$$

και η (21) γίνεται:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{p}{4 \pi \epsilon r^3} (2 \cos \vartheta \hat{r} + \sin \vartheta \hat{\vartheta}) \quad (25)$$

Δεδομένου ότι $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

έχουμε :

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{p}{4 \pi r^3} (2 \cos \vartheta \hat{r} + \sin \vartheta \hat{\vartheta}) \quad (26)$$

γ. Η εξίσωση των δυναμικών γραμμών προσδιορίζεται από τις σχέσεις :

$$\frac{dl_r}{D_r} = \frac{dl_\vartheta}{D_\vartheta} = \frac{dl_\varphi}{D_\varphi} \quad (27)$$

$$\eta \quad \frac{dl_r}{dl_\vartheta} = \frac{D_r}{D_\vartheta} \quad \text{και} \quad \frac{dl_\varphi}{dl_r} = \frac{D_\varphi}{D_r} \quad (28)$$

Αλλά είναι:

$$\left. \begin{aligned} dl_r &= dr \\ dl_\vartheta &= r d\vartheta \\ dl_\varphi &= r \sin \vartheta d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Από τις (26) και (28) προκύπτουν οι :

$$\frac{dr}{r d\vartheta} = \frac{2 \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \quad (30)$$

και

$$\frac{\sin \vartheta d\varphi}{d\vartheta} = 0 \quad (31)$$

Όλοκληρώνοντας τήν (30) έχουμε :

$$r = K \sin^2 \vartheta \quad (32)$$

όπου $K = \text{σταθ.}$

Όλοκληρώνοντας τήν (31) έχουμε :

$$\varphi = C = \text{σταθ.} \quad (33)$$

Τό ζευγάρι τών εξισώσεων (32) καί (33) :

$$\boxed{\begin{array}{l} r = K \sin^2 \vartheta \\ \varphi = C \end{array}} \quad (34)$$

δύνει τήν εξίσωση τών δυναμικῶν γραμμῶν τοῦ πεδίου .

δ. Από τή σχέση (15) προσδιορίζουμε τήν εξίσωση τών ίσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν :

$$\Phi = \frac{\rho \cos \vartheta}{4\pi \epsilon r^2} = \text{σταθ.} = C_1 \quad (35)$$

όποτε τά $\cos \vartheta$ καί C_1 πρέπει νά εἶναι ὁμόσημα. Από τήν (35) έχουμε :

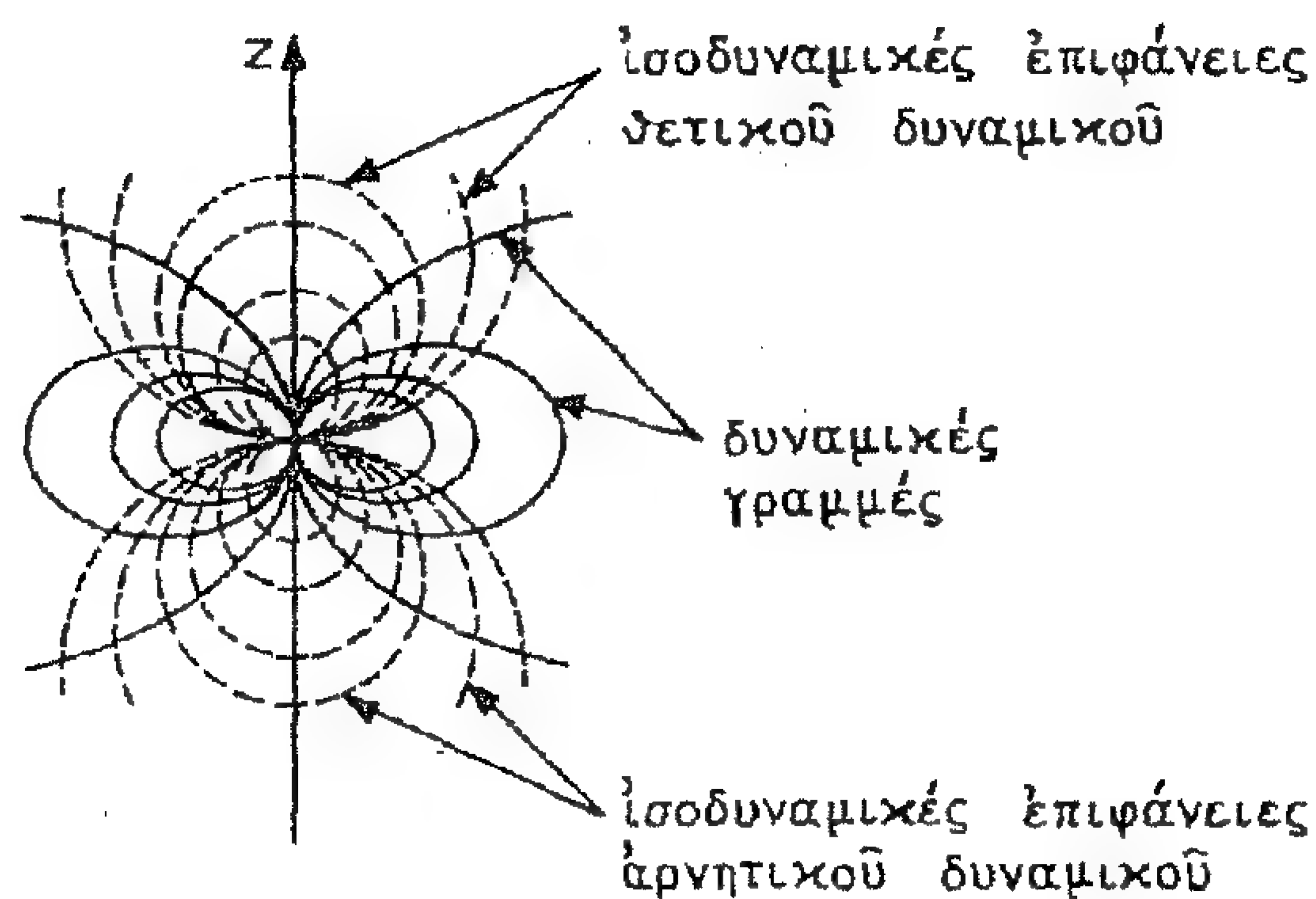
$$\boxed{r^2 = C_2 \cos \vartheta} \quad (36)$$

Ἡ (36) γιά διάφορα C_2 , θετικά, ἱκανοποιεῖται στήν περλοχή γωνιῶν $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ δηλ. στό πάνω ἡμισφαίριο καί δύνει τίς ίσοδυναμικές ἐπιφάνειες θετικοῦ δυναμικοῦ (βλ. σχῆμα 2), ἐνῶ γιά C_2 ἀρνητικά ἱκανοποιεῖται στήν περλοχή γωνιῶν $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi$ καί δύνει τίς ίσοδυναμικές ἐπιφάνειες ἀρνητικοῦ δυναμικοῦ (στό κάτω ἡμισφαίριο σχ. 2)

Ἄν θέλουμε μέ μιᾶ μόνο εξίσωση νά διατυπώσουμε τίς ίσοδυναμικές ἐπιφάνειες ἀπόλυτου δυναμικοῦ μπορούμε ἀπό τήν (36) νά γράψουμε :

$$\boxed{r = C_3 \sqrt{|\cos \vartheta|}} \quad (37)$$

όπου $C_3 > 0$



Σχ. 2

3.4 Έστω τό επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα, πού διαδίδεται στό κενό :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

όπου τά \vec{E}_0 , \vec{B}_0 καί \vec{k} εἶναι πραγματικά διανύσματα, πού ἀποτελοῦν τρισορθογώνιο σύστημα, καί ω σταθερή κυκλική συχνότητα.

α. Νά προσδιορίσετε τό στιγμιαῖο διάνυσμα Poynting \vec{P} , τή συνεχή $\bar{\vec{P}}$ καί τήν ἐναλλασσόμενη $\tilde{\vec{P}}$ συνιστώσα του καί νά δώσετε τή γραφική παράσταση τῶν μέτρων τους P , \bar{P} καί \tilde{P} σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο t , σέ ὁρισμένη θέση \vec{r} τοῦ χώρου.

β. Νά προσδιορίσετε τή μέση ἀκτινοβολούμενη ἰσχύ, πού διαπερνᾷ μιᾷ ἐπίπεδῃ ἐπιφάνειᾳ S , κάθετῃ στό \vec{k} .

Λύση

Μποροῦμε νά γράψουμε:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (\vec{E}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}) e^{j\omega t} = \vec{\tilde{E}} e^{j\omega t} \quad (1)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = (\vec{B}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}) e^{j\omega t} = \vec{\tilde{B}} e^{j\omega t} \quad (2)$$

όπου $\vec{\tilde{E}}$ καί $\vec{\tilde{B}}$ οἱ phasors τῶν πεδίων.

Έχουμε τότε:

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{H} e^{j2\omega t}) \quad (3)$$

ή

$$\vec{P} = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{B}^*) + \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{B} e^{j2\omega t}) \quad (4)$$

Αντικαθιστούμε τα \vec{E} και \vec{B} των (1) και (2) στην (4) και έχουμε:

$$\vec{P} = \frac{1}{2\mu_0} (\vec{E}_0 \times \vec{B}_0) + \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0 e^{j2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}) \quad (5)$$

ή

$$\vec{P} = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 \hat{k} + \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 \hat{k} \cos 2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (6)$$

Ωστε και:

$$\bar{P} = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 \hat{k} \quad (7)$$

$$\tilde{P} = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 \cos 2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot \hat{k} \quad (8)$$

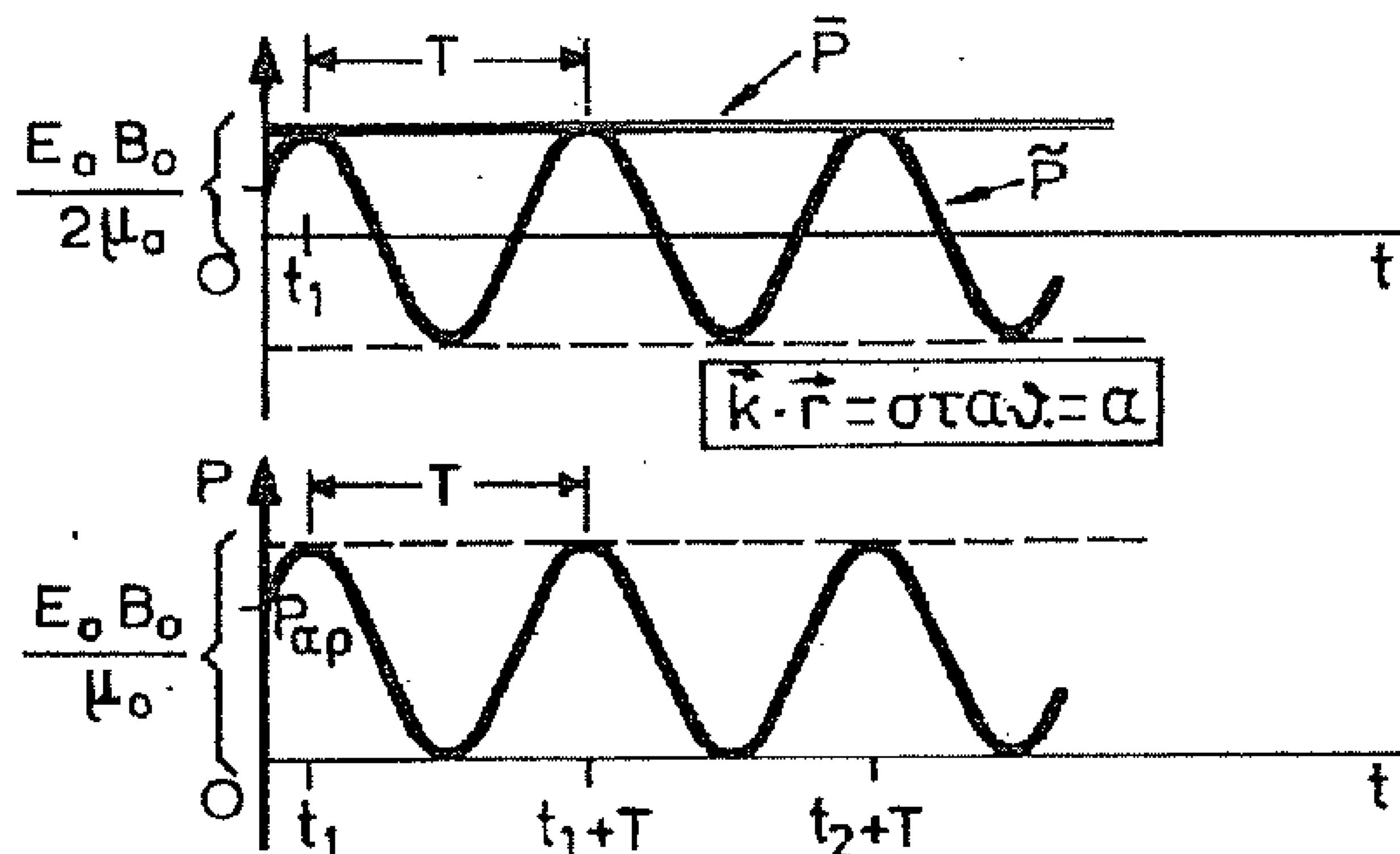
Τά μέτρα των διανυσμάτων είναι:

$$P = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 (1 + \cos 2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \quad (9)$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 \quad (10)$$

$$\tilde{P} = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 \cos 2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (11)$$

Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις των P, \bar{P}, \tilde{P} δίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Η αρχική τιμή του P (γιά $t = 0$) είναι :

$$P_{αρ} = \frac{E_o B_o}{2\mu_o} (1 + \cos 2\alpha) \quad (12)$$

ένω του \tilde{P} :

$$\tilde{P}_{αρ} = \frac{E_o B_o}{2\mu_o} \cos 2\alpha \quad (13)$$

ή περίοδος είναι :

$$T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega} \quad (14)$$

καύ ή χρονική στιγμή t_1 :

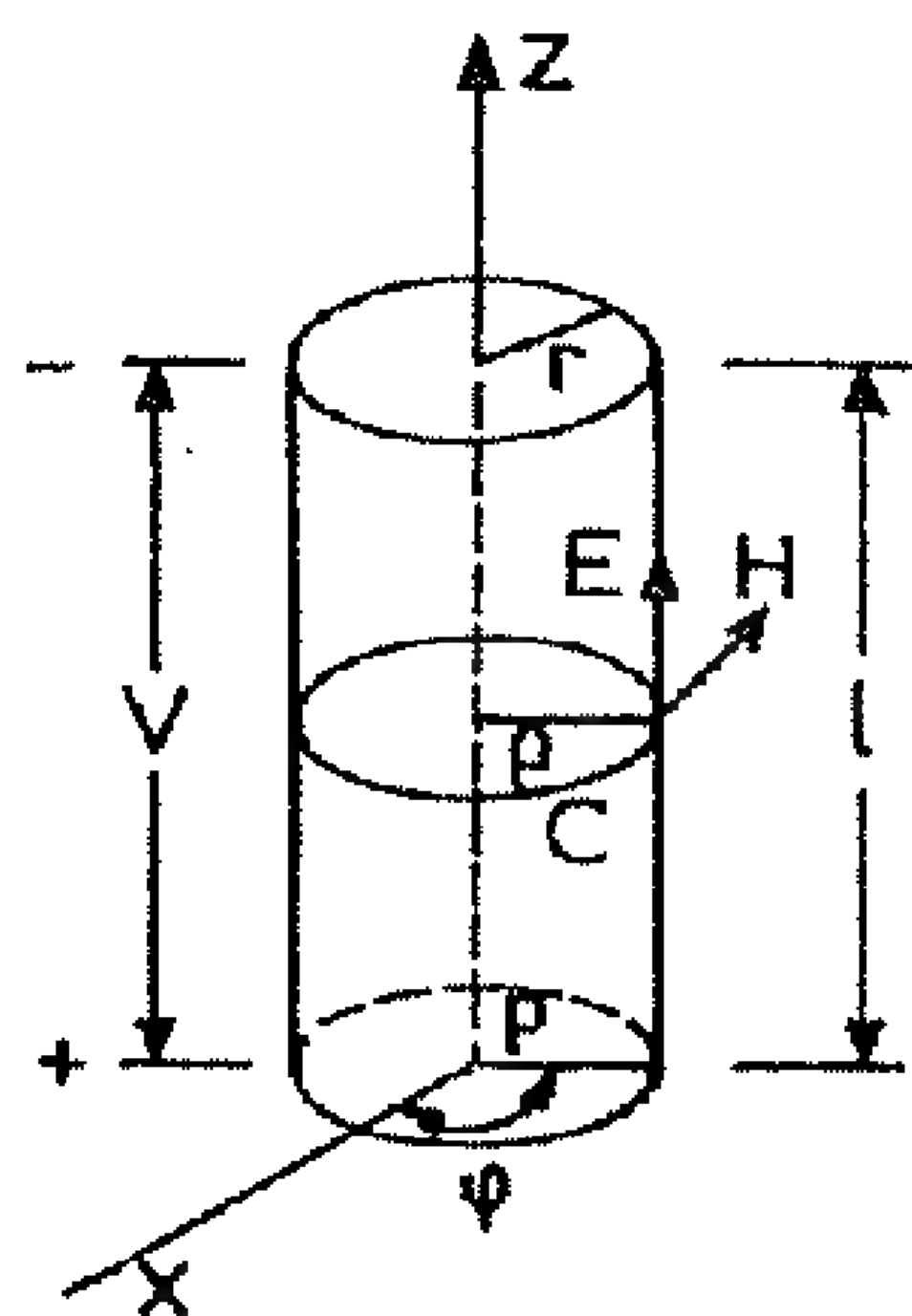
$$t_1 = \frac{\alpha}{\omega} \quad (15)$$

β. θα έχουμε :

$$\bar{N}_{rad} = \int_S \vec{P} \cdot \hat{n} dS = \bar{P} S = \frac{E_o B_o}{2\mu_o} S \quad (16)$$

3.5 Ένας κυλινδρικός άγωγός διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I .
 "Αν r ή ακτίνα του άγωγού, R ή αντίστασή του καύ l τό μήκος του, νά προσδιοριστεί τό διάνυσμα Poynting \vec{P} σέ κάθε σημείο τής έπιφάνειας του άγωγού καύ ή ίσχύς, πού καταναλώνεται στόν άγωγό.

Λύση



Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμέ-
 (ρ, φ, z). Έστω V ή διαφορά δυναμικού
 στά άκρα του άγωγού. Τό πεδίο \vec{E} είναι :

$$\vec{E} = \frac{V}{l} \hat{z} \quad (1)$$

ή

$$\vec{E} = \frac{IR}{l} \hat{z} \quad (2)$$

δηλ. είναι εφαπτομενικό στήν κυλινδρική έπιφάνεια. Έπομένως, λόγω τής όριακής συνθήκης, ή τιμή αύτή θα είναι ίδια κοντά στήν κυλινδρική έπιφάνεια τόσo στό έσωτερικό του άγωγού όσο καύ στό έξωτερικό του.

Τό πεδίο \vec{H} έχει μόνο συνιστώσα κατά τή διεύθυνση $\hat{\phi}$ καύ προσδιορίζεται από τό νόμο του Ampere εφαρμοσμένο σ' έναν κύκλο μέ ακτίνα r στήν άμεση γειτονιά τής έπιφάνειας του άγωγού (1η έξ. του Maxwell):

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (3)$$

$$\vec{H} \quad 2\pi r H_\varphi = I \quad (4)$$

ή τελικά :

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\varphi} \quad (5)$$

Τό διάνυσμα Poynting είναι :

$$\vec{P} \triangleq \vec{E} \times \vec{H} \quad (6)$$

$$\vec{P} = \frac{I^2 R}{2\pi r l} \hat{z} \times \hat{\varphi} = \frac{I^2 R}{2\pi r l} (-\hat{\rho}) \quad (7)$$

ή τελικά :

$$\vec{P} = -\frac{I^2 R}{2\pi r l} \hat{\rho} \quad (8)$$

Άρα, τό διάνυσμα Poynting κατευθύνεται κάθετα προς την επιφάνεια του αγωγού και μάλιστα προς τά μέσα. Η ισχύς που ρέει προς τό έσωτερικό του αγωγού είναι :

$$N = \int_S \vec{P} \cdot (-\hat{\rho}) dS = \frac{I^2 R}{2\pi r l} 2\pi r l = I^2 R$$

Είναι λοιπόν :

$$N = I^2 R \quad (9)$$

3.6 Ένα κατακόρυφο ηλεκτρικό δίπολο έχει μήκος $l = 10 \text{ cm}$ και διαρρέεται από ήμιτονικό ρεύμα, που έχει πλάτος $I_0 = 1 \text{ A}$ και κυκλική συχνότητα $\omega = 10^8 \text{ sec}^{-1}$ (έπομένως μπορεί να θεωρηθεῖ στοιχειώδες) Τό δίπολο ακτινοβολεῖ στόν ελεύθερο χώρο (ϵ_0, μ_0) .

α. Σέ απόσταση $r = 10 \text{ km}$ από τό δίπολο και στό ἕδλο ὀριζόντιο επίπεδο μέ αὐτό, πόσο είναι τό πλάτος E_0 τῆς έντασης τοῦ ηλεκτρικοῦ πεδίου \vec{E} ;

β. Σέ πόση απόσταση τό πλάτος τῶν ὁρῶν τῆς συνιστώσας E_θ τοῦ ηλεκτρικοῦ πεδίου, που ἐξαρτῶνται ἀπό τό $\frac{1}{r^2}$ και ἀπό τό $\frac{1}{r^3}$ πέφτει στό $\frac{1}{100}$ τῆς τιμῆς τοῦ ὅρου που ἐξαρτᾶται ἀπό τό $\frac{1}{r}$;

($\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$) .

Α ύ σ η

Οι τρεις συνιστώσες του \vec{E} σε σφαιρικό σύστημα είναι (βλ. σχέσεις 3-178) .

$$E_r(r, t) = \left(\frac{I_0 l}{2\pi\epsilon_0 v r^2} - \frac{j I_0 l}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \right) \cos\vartheta e^{j(\omega t - kr)} \quad (1)$$

$$E_\vartheta(r, t) = \left(\frac{j I_0 l k^2}{4\pi\epsilon_0 \omega r} + \frac{I_0 l}{4\pi\epsilon_0 v r^2} - \frac{j I_0 l}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \right) \sin\vartheta e^{j(\omega t - kr)} \quad (2)$$

$$E_\varphi(r, t) = 0 \quad (3)$$

α. Στην απόσταση $r = 10\text{km}$ επικρατεί, πρακτικά, μόνο ο προσθε-
τέος της E_ϑ , που εξαρτάται από το $\frac{1}{r}$. Δηλαδή:

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}) = \text{Re}(E_\vartheta \hat{\vartheta}) = \text{Re} \left[\frac{j I_0 l k^2}{4\pi\epsilon_0 \omega r} \sin\vartheta e^{j(\omega t - kr)} \hat{\vartheta} \right] =$$

$$= \text{Re} \left[\frac{I_0 l k^2}{4\pi\epsilon_0 \omega r} \sin\vartheta e^{j(\omega t - kr + \frac{\pi}{2})} \hat{\vartheta} \right] \quad \eta$$

$$\vec{E} = \frac{I_0 l k^2}{4\pi\epsilon_0 \omega r} \sin\vartheta \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right) \hat{\vartheta} \quad (4)$$

Θέτουμε $k = \frac{\omega}{v}$ και $v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ και έχουμε :

$$E_0 = \frac{I_0 l \omega^2}{4\pi\epsilon_0 \omega v^2 r} \sin\vartheta = \frac{I_0 l \omega \epsilon_0 \mu_0}{4\pi\epsilon_0 r} \sin\vartheta$$

και για $\vartheta = \pi/2$ είναι : $E_0 = \frac{I_0 l \omega \mu_0}{4\pi r} \quad (5)$

Εφαρμογή για :

$$I_0 = 1\text{A}$$

$$l = 0,1\text{m}$$

$$\omega = 10^8 \text{ sec}^{-1}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

$$r = 10^4 \text{ m}$$

$$E_0 = \frac{1 \cdot 0,1 \cdot 10^8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot 10^4} \frac{\text{A} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-1}}{\text{m} \cdot \text{m}} = 10^{-4} \frac{\text{A} \cdot \text{m}}{\text{m} \cdot \text{sec}}$$

ή

$$E_0 = 10^{-4} \frac{\text{V}}{\text{m}} = 100 \frac{\mu\text{V}}{\text{m}} \quad (6)$$

β. Στην απόσταση r έχουμε για τους λόγους n_2 , n_3 :

$$n_2 \triangleq \frac{\left[(E_0)_{1/r^2} \right]_0}{\left[(E_0)_{1/r} \right]_0} = \frac{\frac{1}{U r}}{\frac{k^2}{\omega}} = \frac{U}{\omega r} = \frac{c}{\omega r} \quad (7)$$

$$n_3 \triangleq \frac{\left[(E_0)_{1/r^3} \right]_0}{\left[(E_0)_{1/r} \right]_0} = \frac{\frac{1}{\omega r^2}}{\frac{k^2}{\omega}} = \frac{1}{r^2 k^2} = \frac{c^2}{r^2 \omega^2} = n_2^2 \quad (8)$$

Για να έχουμε $n_2 = 1/100$ πρέπει :

$$\frac{c}{\omega r_2} = \frac{1}{100} \quad \text{και} \quad r_2 = \frac{100 c}{\omega} \quad (9)$$

$$\text{ή} \quad r_2 = \frac{10^2 \cdot 3 \cdot 10^8}{10^8} \frac{\text{m}}{\text{sec} \cdot \text{sec}^{-1}} = 300 \text{ m}$$

$$\underline{r_2 = 300 \text{ m}} \quad (10)$$

Για να έχουμε $n_3 = \frac{1}{100}$ πρέπει :

$$\frac{c^2}{r_3^2 \omega^2} = \frac{1}{100} \quad \text{και} \quad r_3 = \frac{10 c}{\omega} \quad (11)$$

$$\text{ή} \quad \underline{r_3 = 30 \text{ m}} \quad (12)$$

Άρα τότε n_2 γίνεται $1/100$ στά 300m , ενώ τότε n_3 στά 30m .

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Για την τυχαία απόσταση r ισχύουν οι (7) και (8) :

$$n_3 = n_2^2 = \frac{c^2}{r^2 \omega^2} \quad (13)$$

π.χ. στά 10km είναι :

$$n_2 = \frac{c}{\Gamma \omega} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^4 \cdot 10^8} = 3 \cdot 10^{-4}$$

$$n_3 = n_2^2 = 9 \cdot 10^{-8}$$

έπομένως σωστά θεωρήθηκε ότι επικρατεί αποκλειστικά ο όρος που εξαρτάται από το $1/r$.

3.7 Ξέρουμε ότι το πεδίο ακτινοβολίας ενός στοιχειώδους ηλεκτρικού διπόλου, που έχει μήκος l και διαρρέεται από ένα αλλασσόμενο ρεύμα με πλάτος I_0 , (για αρκετά μακρινές αποστάσεις από το δίπολο) είναι (βλ. σχέσεις 3-179) :

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} = E_{\theta} \hat{\theta} &= \frac{j k^2 I_0 l \sin \theta}{4 \pi \Gamma \epsilon \omega} e^{j(\omega t - kr)} \hat{\theta} \\ \vec{H} = H_{\phi} \hat{\phi} &= \frac{j k I_0 l \sin \theta}{4 \pi \Gamma} e^{j(\omega t - kr)} \hat{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

α. Νά προσδιοριστεί το στιγμιαίο διάνυσμα Poynting \vec{P} .

β. Νά αποδειχτεί ότι η ολική μέση ισχύς, που ακτινοβολεί το δίπολο στο χώρο είναι :

$$\bar{N}_{ολ} = \frac{1}{2} I_0^2 R_r = I_{εν}^2 R_r \quad (2)$$

όπου $R_r = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = \frac{2\pi}{3} Z \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (3)$

ή λεγόμενη " αντίσταση ακτινοβολίας " του ηλεκτρικού διπόλου μέσα στο συγκεκριμένο μέσο .

Λ ύ σ η

α. Είναι : $\vec{P} \triangleq \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) + \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}) \quad (4)$

Αντικαθιστώντας τις (1) στην (4) έχουμε :

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}_\vartheta \vec{H}_\varphi^* \hat{j} \times \hat{\phi}) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}_\vartheta \vec{H}_\varphi \hat{j} \times \hat{\phi}) \quad (5)$$

Αλλά $\hat{j} \times \hat{\phi} = \hat{r}$ (6)

Ωστε : $\vec{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}_\vartheta \vec{H}_\varphi^* \hat{r}) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}_\vartheta \vec{H}_\varphi \hat{r})$ (7)

ή

$$\vec{P} = \left[\frac{1}{2} \frac{k}{\epsilon \omega} \left(\frac{k l I_0}{4 \pi r} \right)^2 \sin^2 \vartheta - \frac{1}{2} \frac{k}{\epsilon \omega} \left(\frac{k l I_0}{4 \pi r} \right)^2 \sin^2 \vartheta \cos 2(\omega t - k r) \right] \hat{r} \quad (8)$$

Αλλά $\frac{k}{\epsilon \omega} = \frac{\omega}{v \epsilon \omega} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \triangleq Z$ (9)

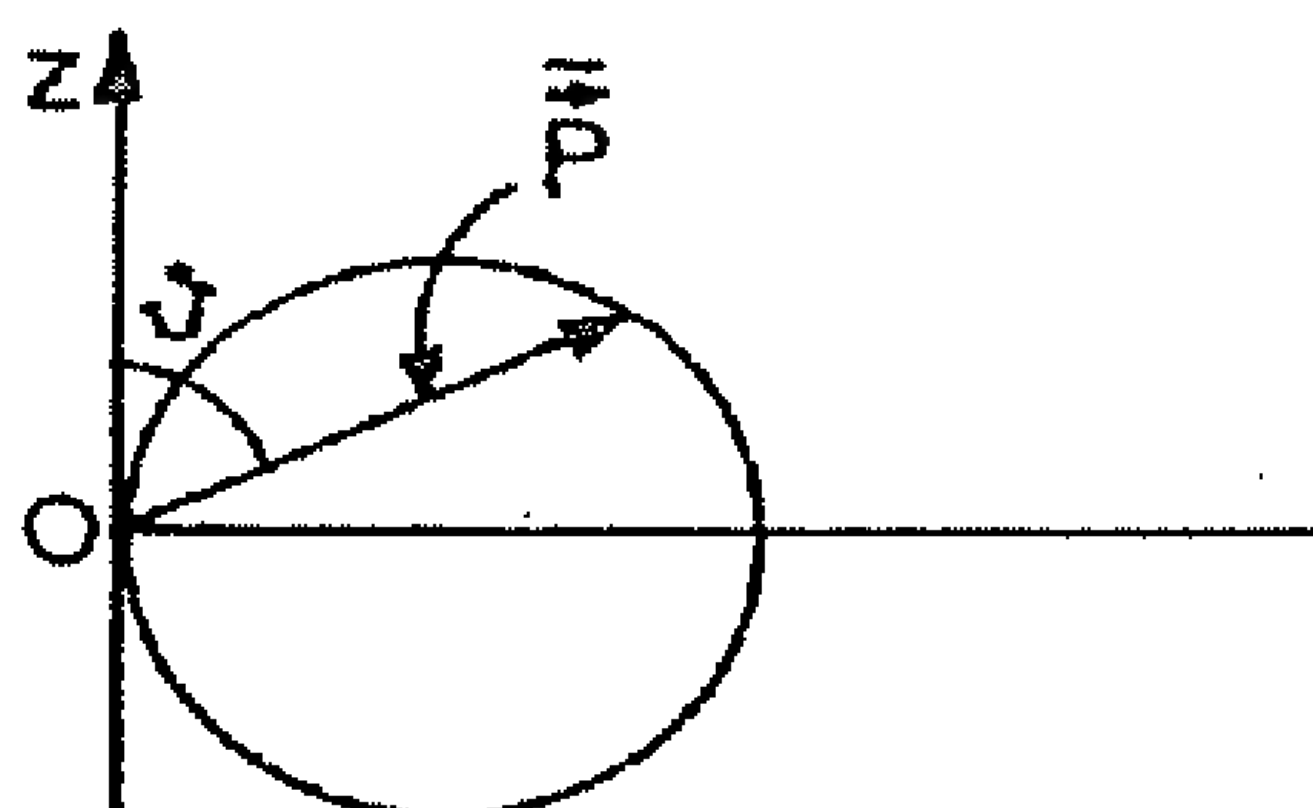
όπου Z ή " κυματική αντίσταση του μέσου "

Ωστε ή (8) γίνεται :

$$\vec{P} = \left[\frac{1}{2} Z \left(\frac{k l I_0}{4 \pi r} \right)^2 \sin^2 \vartheta - \frac{1}{2} Z \left(\frac{k l I_0}{4 \pi r} \right)^2 \sin^2 \vartheta \cos 2(\omega t - k r) \right] \hat{r} \quad (10)$$

ή απλούστερα :

$$\vec{P} = (\bar{P} + \tilde{P}) \hat{r} \quad (11)$$



Σχ. 1

Ωστε ή ισχύς ακτινοβολείται κατά την ακτινική διεύθυνση \hat{r} και είναι ανάλογη προς το $\sin^2 \vartheta$, που σημαίνει ότι κατά τον άξονα του διπόλου ($\vartheta = 0$) δεν ακτινοβολείται ενέργεια (σχ. 1).

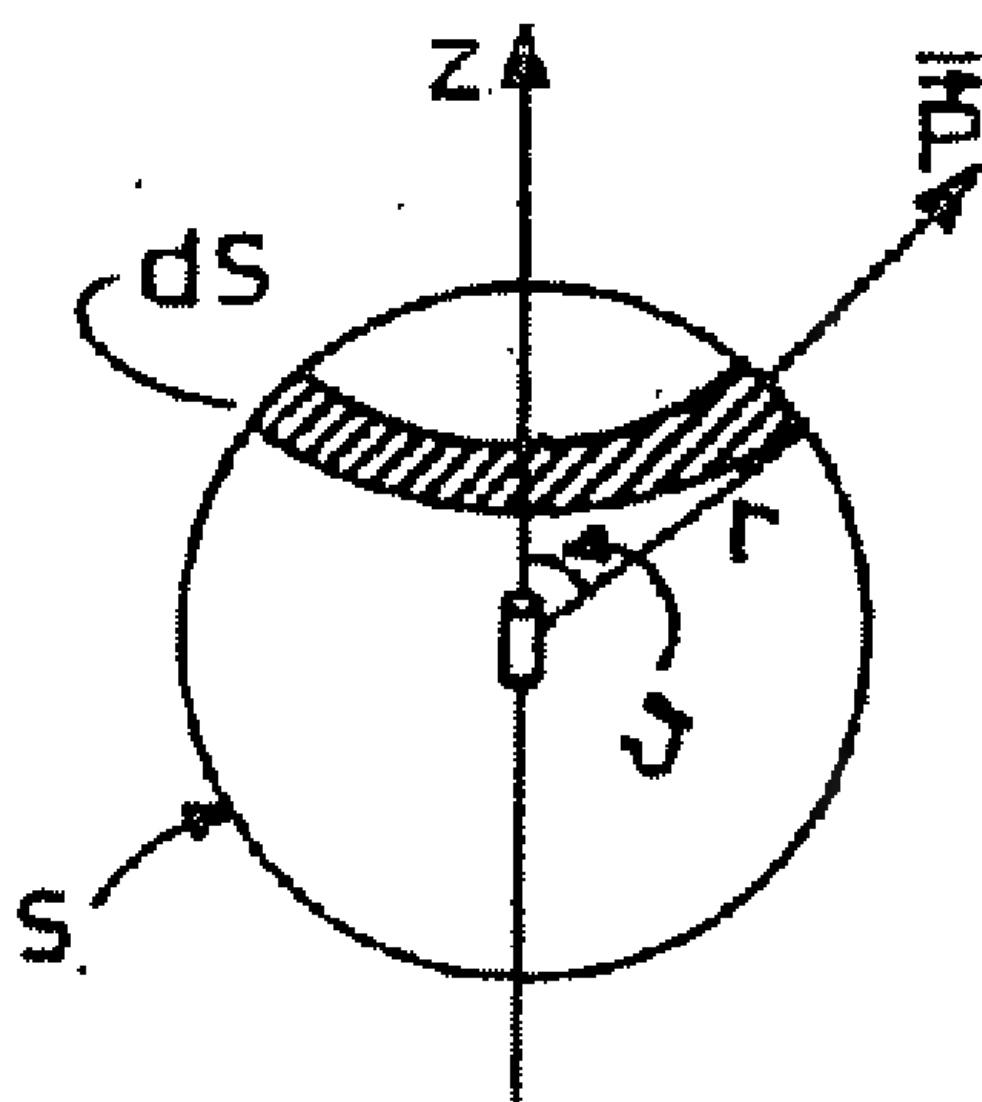
β. θεωρούμε μία σφαίρα που περιβάλλει το δίπολο κι έχει ακτίνα r (βλ. σχ. 2) .

Είναι:

$$\bar{N}_{0\lambda} = \oint_S \vec{P} \cdot \hat{r} dS \quad (12)$$

Αλλά $dS = 2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta$ (13)

και επομένως :



Σχ. 2

$$\vec{P} \cdot \hat{r} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k l I_0}{4\pi} \right)^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \quad (14)$$

Ωστε $\bar{N}_{o\lambda} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k l I_0}{4\pi} \right)^2 2\pi \int_0^\pi \sin^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta$ (15)

Αλλά $\int_0^\pi \sin^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = - \int_0^\pi (1 - \cos^2 \vartheta) d \cos \vartheta = \left[-\cos \vartheta \right]_0^\pi +$
 $+ \left[\frac{\cos^3 \vartheta}{3} \right]_0^\pi = 2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}$ (16)

Από τις (15) και (16) έχουμε:

$$\bar{N}_{o\lambda} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{\frac{2\pi}{\lambda} l}{2\pi} \right) \frac{I_0^2}{4} 2\pi \frac{4}{3} = \frac{\pi}{3} Z \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 I_0^2 \quad (17)$$

Θέτοντας $R_r \triangleq \frac{2\pi}{3} Z \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2$ (18)

έχουμε : $\bar{N}_{o\lambda} = \frac{1}{2} R_r I_0^2 = I_{ev}^2 R_r$ (19)

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Για τό κενό (πρακτικά και για τόν αέρα) εζναι :

$$Z_0 = 120\pi = 377 \Omega \quad \text{και η (18) δύνει :}$$

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \Omega \quad (20)$$

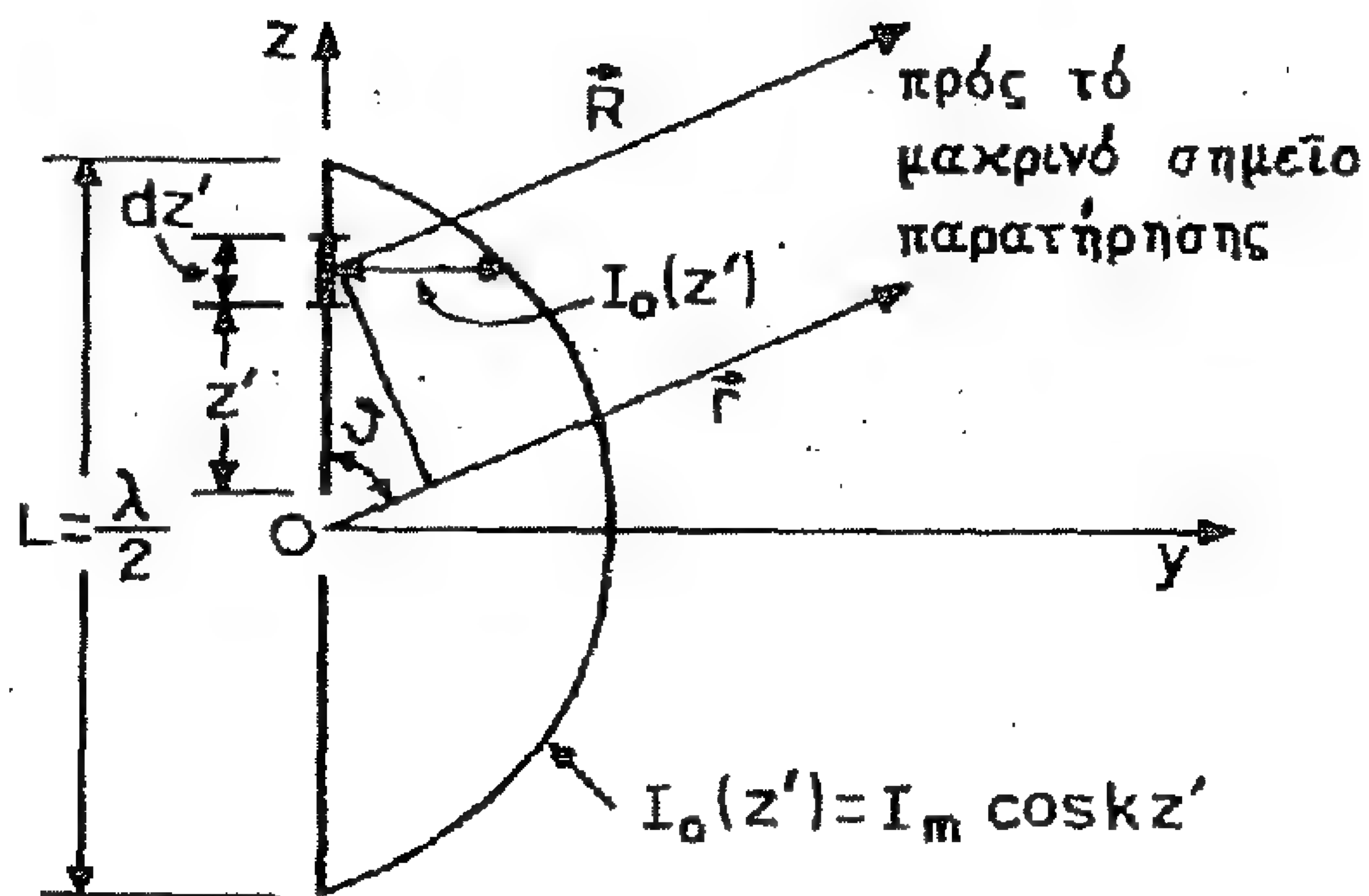
3.8 Μελέτη ακτινοβολίας κεραίας $\lambda/2$:

Θεωρώντας γνωστές τις εξισώσεις του πεδίου ακτινοβολίας του στοιχειώδους ηλεκτρικού διπόλου, να προσδιορίσετε τό πεδίο ακτινοβολίας μιās εὐθύγραμμης κεραίας πού τροφοδοτείται στό μέσο της μέ έναλλασσόμενο ρεύμα κυκλικῆς συχνότητας ω και ἔχει μήκος :

$$L = \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

(όπου $\lambda = \frac{2\pi v}{\omega}$ με $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

ταχύτητα του φωτός στον
αέρα που θεωρείται ότι
έχει διηλεκτρική σταθερά
 ϵ και μαγνητική διαπερα-
τότητα μ). Δύνεται ότι
τό πλάτος του εναλλασσό-
μενου ρεύματος που διαρ-



Σχ. 1

ρέει την κεραία, κατανέμεται κατά μήκος της σύμφωνα με την:

$$I_0(z') = I_m \cos kz' \quad (2)$$

όπου $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$.

Λύση

Ξέρουμε ότι τό πεδίο ενός στοιχειώδους διπόλου dz' που βρίσκε-
ται στη θέση z' από τό μέσο 0, δύνεται από τίς (βλ. σχ. 3-179) :

$$d\vec{E}(t) = \frac{jk^2 I_0(z') dz'}{4\pi\epsilon\omega R} \sin\vartheta e^{j(\omega t - kR)} \hat{\vartheta} \quad (3)$$

$$d\vec{B}(t) = \frac{jk I_0(z') dz'}{4\pi\mu^{-1}R} \sin\vartheta e^{j(\omega t - kR)} \hat{\varphi} \quad (4)$$

Από τό σχήμα φαίνεται ότι, για μεγάλες αποστάσεις, όποτε οι \vec{r}
και \vec{R} είναι πρακτικά παράλληλες, έχουμε :

$$R = r - z' \cos\vartheta \quad (5)$$

δηλ. ή διαφορά μεταξύ R και r είναι μικρή ($\leq \lambda/4$).

Η μικρή αυτή διαφορά δέν θά επηρεάσει τόν παράγοντα τοῦ πλάτους
όταν τό r είναι αρκετά μεγάλο και μπορούμε νά βάλουμε όπου :

$\frac{1}{R} \rightarrow \frac{1}{r}$. Αντίθετα όμως, στον παράγοντα φάσης, πρέπει νά ληφθῇ

υπόψη και ό εκθετικός όρος γράφεται $e^{j\omega t} e^{-jk r} e^{jk z' \cos\vartheta}$

Παραλείποντας τόν παράγοντα $e^{j\omega t}$ χρονικής μεταβολῆς και παίρ-

νοντας υπόψη και την (2) έχουμε από τις (3) και (4) για τους phasors του πεδίου :

$$d\vec{E} = \frac{jk^2 I_m}{4\pi\epsilon\omega r} \sin\vartheta e^{-jkr} \cos kz' e^{jkz'\cos\vartheta} dz' \hat{\vartheta} \quad (6)$$

$$d\vec{B} = \frac{jk I_m}{4\pi\mu^{-1}r} \sin\vartheta e^{-jkr} \cos kz' e^{jkz'\cos\vartheta} dz' \hat{\phi} \quad (7)$$

Για να πάρουμε, ολοκληρώνοντας τις (6) , (7) τα πεδία \vec{E}, \vec{B} πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα :

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-L/2}^{+L/2} \cos kz' e^{jk\cos\vartheta z'} dz' = \frac{1}{jk\cos\vartheta} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \cos kz' \cdot d(e^{jk\cos\vartheta z'}) = \\ &= 0 + \frac{k_1}{jk\cos\vartheta} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} e^{jk\cos\vartheta z'} \sin kz' dz' = -\frac{1}{k\cos^2\vartheta} \left[\sin kz' e^{jk\cos\vartheta z'} \right]_{-\lambda/4}^{\lambda/4} + \frac{k_1}{k\cos^2\vartheta} Q \end{aligned}$$

Εκτελώντας τις πράξεις για $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ έχουμε εύκολα για το Q

$$Q = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{k\sin^2\vartheta} \quad (8)$$

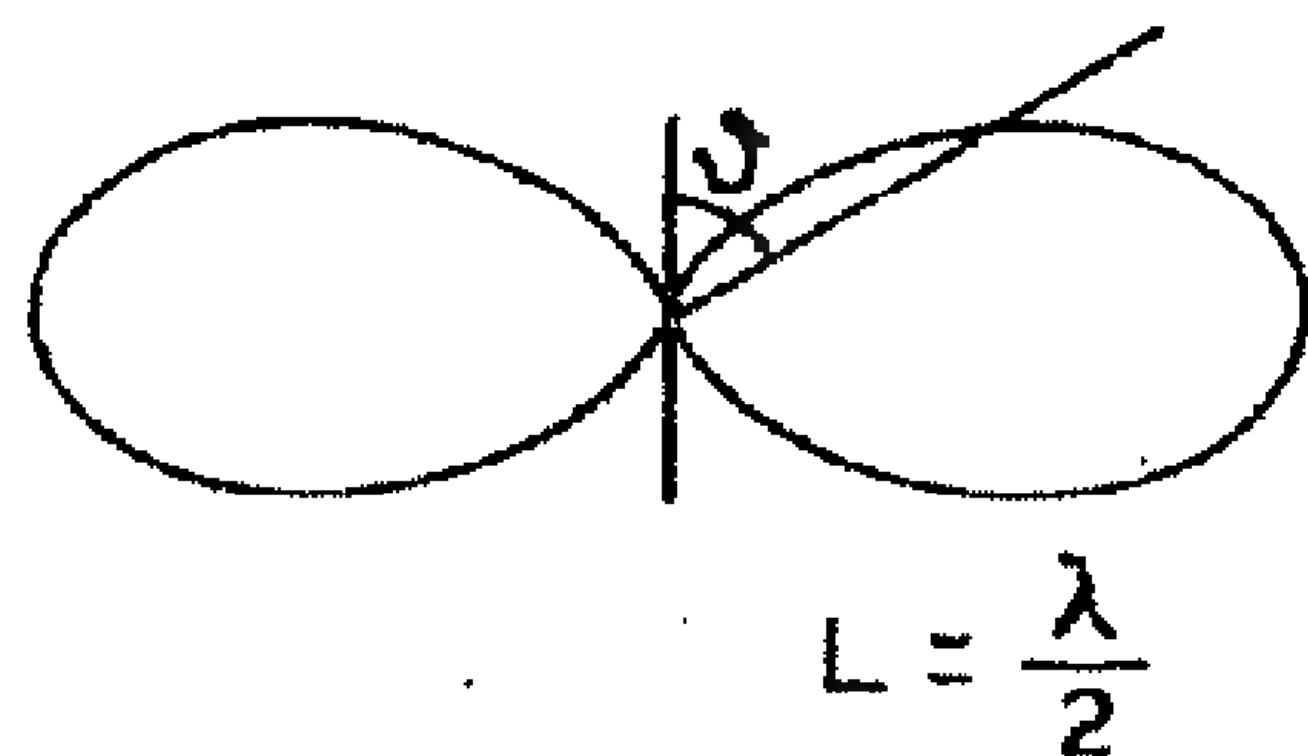
Ωστε, η ολοκλήρωση των (6) και (7) δίνει:

$$\vec{E} = \frac{jk e^{-jkr} I_m}{2\pi\epsilon\omega} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin\vartheta} \right] \hat{\vartheta} \quad (9)$$

$$\vec{B} = \frac{j e^{-jkr} I_m}{2\pi\mu^{-1}r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin\vartheta} \right] \hat{\phi} \quad (10)$$

και πολλαπλασιάζοντας επί το χρονικό παράγοντα $e^{j\omega t}$ παίρνουμε την πλήρη έκφραση του πεδίου $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ του έχει μορφή

σφαιρικού κύματος $e^{j(\omega t - kr)}$ μέ
πλάτος που εξαρτάται μόνο από
τή γωνία ϑ (διάγραμμα χώρου
"έκ περιστροφής") όπως φαίνε-
ται στο σχ. 2.



Π α ρ α τ ή ρ η σ η : Τελεώς

ανάλογα μέ τήν πρὸ πάνω μελέτη

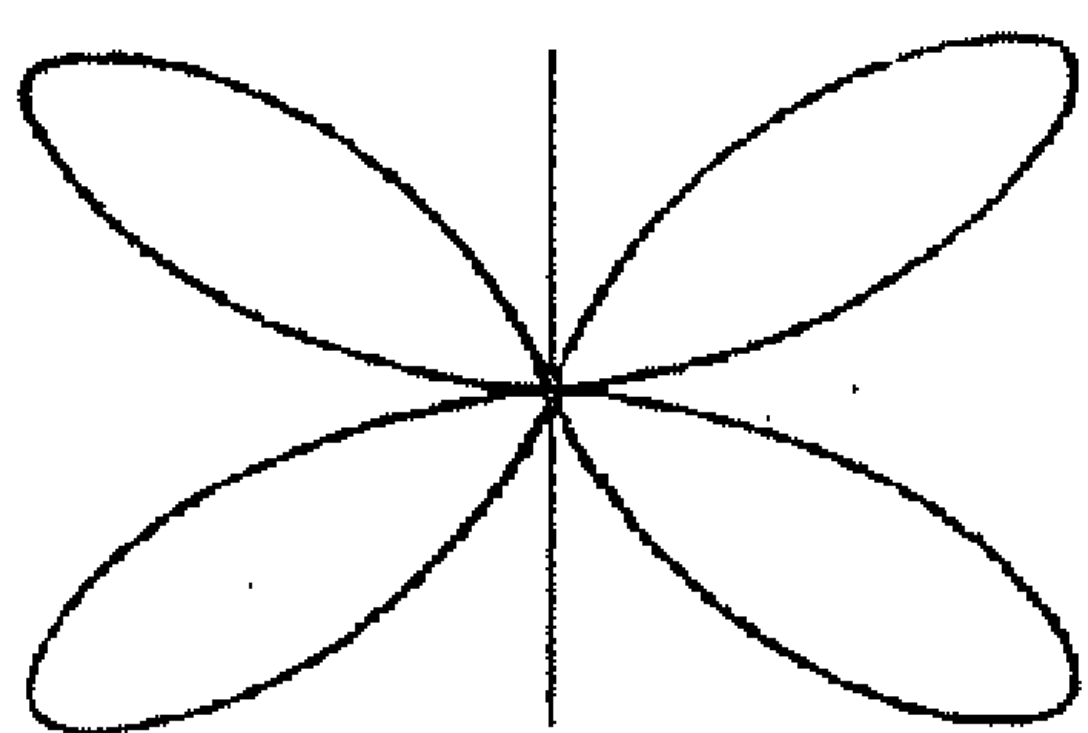
Σχ. 2

μπορούμε νά μελετήσουμε τήν ἀκτινοβολία μιᾶς γραμμικῆς κεραίας
ὁποιοῦδήποτε μήκους L τροφοδοτημένης στό μέσο της. Ἐτσι παίρ-
νουμε γιά τήν ἠλεκτρική ἔνταση τοῦ πεδίου ἀκτινοβολίας:

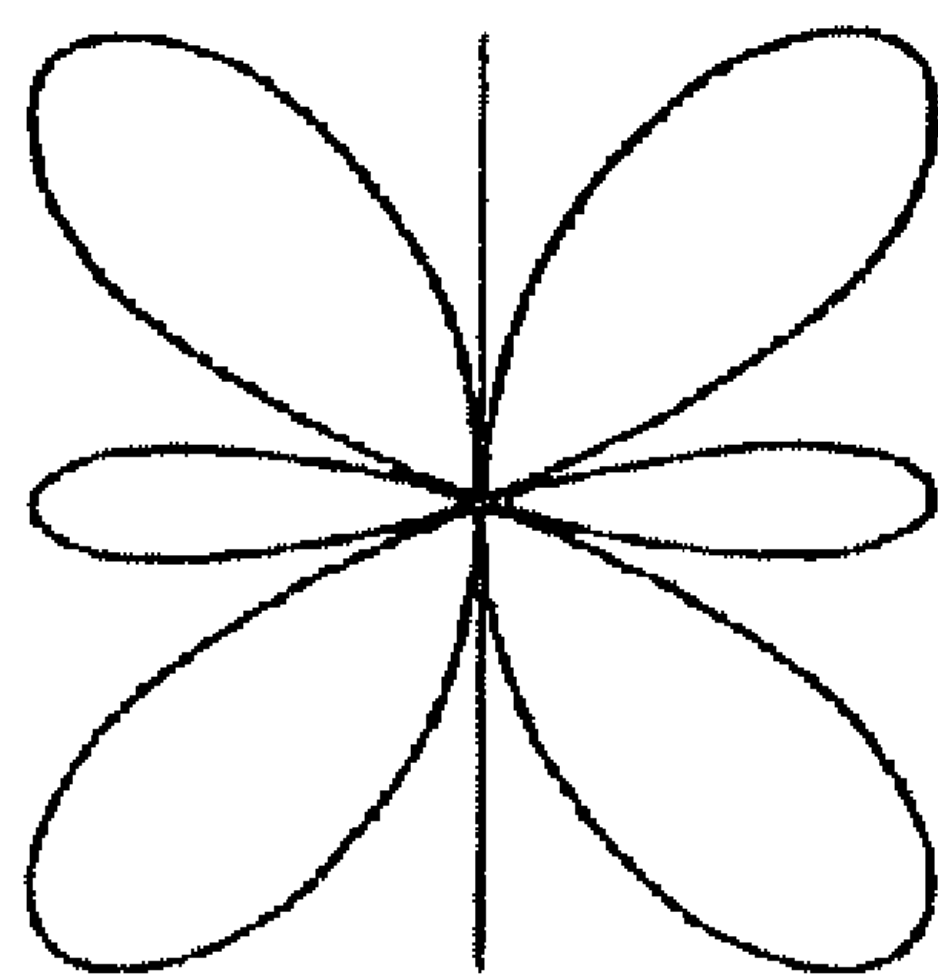
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{j k^2 I_m}{2 \pi \epsilon \omega r} e^{j(\omega t - kr)} \left[\frac{\cos(kL \cos \vartheta / 2) - \cos(kL / 2)}{\sin \vartheta} \right] \quad (11)$$

ἡ ὁποία γιά $L = \lambda/2$ δύνει βέβαια τήν (9).

Στό πρὸ κάτω σχ. 3 φαίνεται τό διάγραμμα πεδίου γραμμικῆς κε-



(α)



(β)

Σχ. 3

ραίας γιά τίς περιπτώσεις (α) $L = \lambda$ καί (β) $L = \frac{3}{4} \lambda$.

3.9 Κάτω ἀπό ποιές συνθήκες εἶναι δυνατό νά ὀρίσουμε τήν ἔντα-
ση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου \vec{B} ὡς βαθμίδα ἐνός μονόμετρου μαγνητι-
κοῦ δυναμικοῦ, δηλ. $\vec{B} = -\vec{\nabla} \Phi_m$; Ποιά θά εἶναι, τότε, ἡ διαφο-
ρική ἐξίσωση τοῦ Φ_m ;

('Απ. Όταν $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$, $\nabla^2 \Phi_m = 0$) .

3.10 Ποιές είναι οι διαφορικές εξισώσεις για τα πεδία \vec{H} και \vec{J} μέσα σ' έναν άγωγο ;

('Απ. $\nabla^2 \vec{H} = j\omega\mu\sigma\vec{H}$, $\nabla^2 \vec{J} = j\omega\mu\sigma\vec{J}$)

3.11 Αν στον κενό χώρο υπάρχει η πυκνότητα ρεύματος :

$$\vec{J} = J_0 \sin \alpha x \hat{x} , \quad \alpha = \text{σταθ.}$$

α. Νά γραφεί η σχετική διαφορική εξίσωση για το διανυσματικό δυναμικό \vec{A} .

β. Νά υπολογιστεί το διανυσματικό δυναμικό υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει εξάρτησή του από τα y , z .

γ. Νά υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο \vec{B} .

('Απ. (α) $\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} = -\mu_0 \vec{J}$

(β) $\vec{A} = \left[\frac{\mu_0 J_0}{\alpha^2} \sin \alpha x + C_1 x + C_2 \right] \hat{x}$

(γ) $\vec{B} = 0$)

3.12 Δύο άπεραντα και παράλληλα άγωγιμα επίπεδα βρίσκονται στις θέσεις $z = 0$ και $z = \alpha$. Ανάμεσά τους υπάρχει το έναλλασσόμενο ηλεκτρικό πεδίο

$$\vec{E} = E_0 \sin \frac{\pi z}{\alpha} \hat{x} e^{j\omega t}$$

α. Νά προσδιορίσετε τα μεγέθη $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ και $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ σε όλα τα σημεία ανάμεσα στα επίπεδα.

β. Μπορεί το \vec{E} να εκφραστεί σαν $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$ όπου ϕ μονόμετρο δυναμικό ;

γ. Νά προσδιοριστεί το μαγνητικό πεδίο \vec{B} ανάμεσα στα δύο επίπεδα.

$$(\text{'Απ. } (\alpha) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = E_0 \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi z}{a} e^{j\omega t} \hat{y}$$

$$(\beta) \quad \text{"Όχι" , γιατί } \vec{\nabla} \times \vec{E} \neq 0$$

$$(\gamma) \quad \vec{B} = \frac{j\pi E_0}{\omega a} \cos \frac{\pi z}{a} e^{j\omega t} \hat{y} \quad)$$

3.13 Έστω ότι υπάρχει στο χώρο ένα ηλεκτρικό πεδίο της μορφής

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (1)$$

όπου \vec{k} είναι σταθερό πραγματικό διάνυσμα, $\vec{E}_0 = \vec{E}_0 e^{j\varphi}$ ένας σταθερός phasor και ω μία σταθερή κυκλική συχνότητα.

α. Νά αποδειχτεί ότι το πεδίο της (1) αποτελεί ένα επίπεδο κύμα, που διαδίδεται κατά την κατεύθυνση του \vec{k} με ταχύτητα ω/k . (Νά δειχτεί δηλ. ότι οι ίσοφασικές επιφάνειες του κύματος είναι επίπεδα, που η απόστασή τους από την αρχή των αξόνων μεγαλώνει με ρυθμό ω/k).

β. Υποθέτοντας ότι το υλικό, μέσα στο οποίο διαδίδεται το κύμα (1) δεν έχει απώλειες ($\sigma = 0$) και δεν περιέχει πηγές ($\rho = 0$, $\vec{J}_1 = 0$) και ότι η διηλεκτρική σταθερά του και η μαγνητική διαπερατότητα του είναι αντίστοιχα, ϵ και μ , νά αποδειχτεί ότι το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} ικανοποιεί την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου αρκεί νά είναι $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$.

γ. Κάνοντας χρήση της 3^{ης} εξίσωσης του Maxwell νά αποδειχτεί ότι $\vec{E} \perp \vec{k}$, (δηλ. νά δειχθεί ότι $\vec{E} \cdot \vec{k} = 0$)

δ. Νά προσδιοριστεί ο phasor $\vec{B}(\vec{r}, t)$ του μαγνητικού πεδίου που συνοδεύει το ηλεκτρικό της (1) και νά αποδειχτεί

ὅτι ἡ τριάδα \vec{E} , \vec{B} , \vec{k} ἀποτελεῖ τρισορθογώνιο σύστημα διανυσμάτων.

ε. Νά προσδιοριστοῦν τὰ πραγματικά διανύσματα \vec{E} , \vec{B} καὶ \vec{H} καὶ νά ἀποδειχτεῖ ὅτι εἶναι $Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ (τό Z εἶναι ἡ λεγόμενη κυματική ἀντίσταση τοῦ μέσου).

3.14 Μέσα σ' ἓνα ἀγώγιμο μέσο, μέ εἰδική ἀγωγιμότητα σ διαδίδεται ἓνα ἠλεκτρομαγνητικό κύμα, πού ἔχει ἠλεκτρικό πεδίο

$$\vec{E} = E_y \hat{y} = E_0 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \alpha x)} \hat{y} \quad (1)$$

ὅπου

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \quad (2)$$

(βλ. θεωρία Κεφ. 3.5.2)

α. Νά προσδιοριστεῖ ἡ μαγνητική διέγερση \vec{H} πού συνοδεύει τό \vec{E} τῆς (1).

β. Νά προσδιοριστεῖ ἡ κυματική ἀντίσταση (Z_c) τοῦ ἀγώγιμου μέσου, πού ὁρίζεται :

$$Z_c \triangleq \frac{\vec{E}}{\vec{H}} \quad (3)$$

γ. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τό πραγματικό μέρος τῆς Z_c ἐκφράζει τήν ἀντίσταση R_s , πού παρουσιάζει κατὰ μήκος τῆς μιᾶς πλάκας ἀπό τό ἀγώγιμο ὑλικό μέ μήκος l , πλάτος w καὶ πάχος d , ὅπου $l = w = 1\text{m}$ καὶ $d = x_0 = \frac{1}{\alpha}$ (δηλ. d ἴσο μέ τό βάθος διείσδυσης τοῦ ὑλικοῦ). Σημειώνεται ὅτι ἡ R_s λέγεται καὶ "ἐπιδερμική ἀντίσταση" τοῦ ὑλικοῦ.

(Ἀπ. (α) $\vec{H} = \frac{\alpha \sqrt{2}}{\omega \mu} E_y e^{-j\frac{\pi}{4}} \hat{z}$

δηλ. ἐμφανίζει διαφορά φάσης 45° ὡς πρὸς τό \vec{E} .

$$(β) \quad Z_c = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} + j \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} \angle 45^\circ$$

$$(γ) \quad R_s = \frac{1}{\sigma x_0} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} = \operatorname{Re} Z_c \quad)$$

3.15 Ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα με συχνότητα 3GHz πέφτει πάνω σ' ένα μεγάλο φύλλο πολυστερύνης που έχει σχετική διηλεκτρική σταθερά $\epsilon_r = 2,7$. Πόσο πάχος πρέπει να έχει το φύλλο ώστε να επιβραδύνει τη φάση του κύματος, που το διαπερνά, κατά 180° σε σύγκριση με το μέρος του κύματος, που περνά μέσα από μια μεγάλη τρύπα του διηλεκτρικού φύλλου ;

(Απ. $d = 77,7 \text{ mm}$) .

3.16 Ένα μακρύ πηνίο με ακτίνα σπειρών r διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I . Μελετώντας ένα κομμάτι του πηνίου, με μήκος l και αριθμό σπειρών N

α. Να προσδιορίσετε το διάνυσμα Poynting \vec{P} πάνω στην κυλινδρική επιφάνεια S , που μόλις περιβάλλει το μέρος αυτό του πηνίου, κατά τη διάρκεια της αποκατάστασης του ρεύματος I ,

β. Να υπολογίσετε την ισχύ N που εισρέει και αποθηκεύεται στο μέρος αυτό του πηνίου κατά τη διάρκεια της αποκατάστασης του ρεύματος και

γ. Να υπολογίσετε την ενέργεια W που είναι αποθηκευμένη στο έσωτερικό του μέρους αυτού του πηνίου, όταν πιά έχει αποκατασταθεί το ρεύμα I .

(Θεωρήστε ότι είναι i ή στιγμιαία τιμή του ρεύματος και ότι είναι γνωστός ο συντελεστής αυτεπαγωγής του τμήματος αυτού του πηνίου $L = \frac{\pi r^2 \mu N^2}{l}$)

$$\begin{aligned}
 (\text{'Απ. } \alpha. \quad \vec{P} &= - \frac{\mu N^2 r i}{2 l^2} \frac{\partial i}{\partial t} \hat{p} \\
 \beta. \quad N &= \int_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = L i \frac{di}{dt} \\
 \gamma. \quad W &= \int_{i=0}^I N dt = \frac{1}{2} L I^2 \quad)
 \end{aligned}$$

3.17 Ένα όμοαξονικό καλώδιο αποτελείται από έναν έσωτερικό κυλινδρικό άγωγό μέ ακτίνα a καί από έναν έξωτερικό άγωγίμο κύλινδρο μέ ακτίνα b . Στην περίπτωση πού οί άγωγοί είναι τέλει-οι, μπορούν νά μεταφέρουν συνεχή (dc) ίσχύ μέσω επιφανειακών ρευμάτων πάνω τους, πού ρέουν μέ αντίθετες κατευθύνσεις μέσα στόν έσωτερικό καί στόν έξωτερικό κύλινδρο. Αν ή τάση στό άκρο του καλωδίου (μεταξύ των δύο κυλίνδρων) είναι V καί τό όλικό ρεύμα I

α . Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, ϕ, z) καί υποθέτοντας γνωστό ότι στό χώρο ανάμεσα στους κυλινδρικούς άγωγούς είναι :

$$V(\rho) = V \frac{\ln \frac{\rho}{b}}{\ln \frac{a}{b}} \quad \text{καί} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi},$$

νά προσδιορίσετε στό χώρο αυτό τό διάνυσμα Poynting.

β . Πόση ίσχύς N μεταφέρεται από τό όμοαξονικό καλώδιο ;

$$(\text{'Απ. } \alpha. \quad \vec{P} = - \frac{VI}{2\pi\rho^2 \ln \frac{a}{b}} \hat{z}$$

$$\beta. \quad N = VI \quad)$$

3.18 Ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα μέ συχνότητα 100 MHz έχει μέσο διάνυσμα Poynting μέ μέτρο 5 Wm^{-2} καί διαδύδεται μέσα σέ μέσο, πού έχει $\mu_r = 2$ καί $\epsilon_r = 2$. Νά προσδιορίσετε :

- α. Τήν ταχύτητα τοῦ κύματος
- β. Τό μήκος κύματος
- γ. Τήν κυματική αντίσταση τοῦ μέσου
- δ. Τήν ενεργό τιμή E_{eff} τοῦ ηλεκτρικοῦ πεδίου \vec{E} καί
- ε. Τήν ενεργό τιμή H_{eff} τῆς μαγνητικῆς διέγερσης \vec{H} .

('Απ. α. $v = 150 \text{ Mm/sec}$

β. $\lambda = 1,5 \text{ m}$

γ. $Z = 377 \Omega$

δ. $E_{\text{eff}} = 43,4 \text{ V/m}$

ε. $H_{\text{eff}} = 115,1 \text{ mA/m}$)

3.19 Ἐνα ἐπίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα ἔχει μέγιστο πλάτος ἡλεκτρικοῦ πεδίου $E_0 = 6 \text{ V/m}$. Ἄν τό μέσο ὅπου διαδίδεται τό κύμα δέν ἔχει ἀπώλειες καί ἔχει $\epsilon_r = 3$ καί $\mu_r = 1$, νά προσδιοριστοῦν :

α. Ἡ ταχύτητα τοῦ κύματος

β. Τό μέγιστο πλάτος τοῦ διανύσματος Poynting.

γ. Ἡ μέση τιμή τοῦ διανύσματος Poynting

δ. Ἡ κυματική αντίσταση τοῦ μέσου καί

ε. Τό μέγιστο πλάτος τῆς μαγνητικῆς διέγερσης H_0 .

('Απ. α. $173,2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$

β. $165,4 \text{ mW/m}^2$

γ. $82,7 \text{ mW/m}^2$

δ. $217,7 \Omega$

ε. $27,6 \text{ mA/m}$)

3.20 Θεωρούμε μία δέσμη επίπεδου κύματος, με εγκάρσια διατομή 1 m^2 , που διαδίδεται στον αέρα και μεταφέρει όλη της μέση ισχύ 100 W .

α. Πόσο είναι τό μέγιστο πλάτος E_0, B_0 του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα ;

β. Πόση είναι η μέση πυκνότητα της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας στο χώρο της δέσμης ;

('Απ. α. $E_0 = 274 \text{ V/m}$, $B_0 = 9,16 \cdot 10^{-7} \text{ Wb/m}^2$

β. $w = 0,33 \cdot 10^{-6} \text{ J/m}^3$)

3.21 Η γη δέχεται από τον ήλιο φωτεινή ακτινοβολία με ένταση $0,14 \text{ Wcm}^{-2}$.

α. Νά προσδιοριστεί τό μέτρο του διανύσματος Poynting

β. "Αν ο ήλιος υποθεθεί ισότροπη πηγή ακτινοβολίας πόση είναι η συνολική ισχύς που ακτινοβολεί ;

γ. Ποιά είναι η ενεργός τιμή του ηλεκτρικού πεδίου στη γη αν υποθέσουμε ότι όλο τό ηλιακό φως αντιστοιχεί σε μία μόνο συχνότητα ; ('Απόσταση Γη - "Ηλιος $\approx 150 \text{ Gm}$) .

('Απ. α. $\bar{P} = 1,4 \text{ kW m}^{-2}$

β. $N = 3,96 \cdot 10^{26} \text{ W}$

γ. $E_{\text{eff}} = 726,5 \text{ Vm}^{-1}$)

3.22 Ο ήλιος εκπέμπει ραδιοκύματα στην περιοχή των 3 GHz που φτάνουν στη Γη με φασματική πυκνότητα έντάσεως $P_f = 10^{-20} \text{ W/m}^2 \text{ Hz}$.

α. "Αν η P_f θεωρηθεί σταθερή σε μία ζώνη εύρους $\Delta f = 1 \text{ GHz}$, πόσο είναι τό μέτρο \bar{P} του μέσου διανύσματος Poynting ;

β. "Αν θεωρηθεί ότι η ισχύς που εκπέμπεται μέσα στη ζώνη Δf έχει μία μόνο συχνότητα, πόση θά είναι η ενεργός

τιμή E_{eff} του ηλεκτρικού πεδίου ; (κυματική αντίσταση του κενού και του αέρα $Z = 120 \pi = 377 \Omega$)

γ. Πόση μέση ραδιοκυματική ισχύ \bar{N} εκπέμπει ο ήλιος μέσα στη ζώνη Δf , αν τον θεωρήσουμε ισότροπη πηγή ; (απόσταση Γη - Ήλιος : $R = 150 \text{ Gm}$) (Θέμα Έξετάσεων Οκτωβρίου 1978) .

('Απ. α. $\bar{P} = 10 \text{ pW/m}^2$

β. $E_{\text{eff}} = 61,4 \mu\text{V/m}$

γ. $\bar{N} = 2,83 \text{ TW}$)

3.23 Σέ προηγούμενο πρόβλημα (προβλ. 3.3) αποδείχτηκε ότι τό ηλεκτροστατικό πεδίο πού δημιουργεί ένα στατικό ηλεκτρικό δίπολο σέ κάποια μακρινή (σέ σχέση μέ τίς διαστάσεις του) απόσταση \vec{r} , είναι :

$$\vec{E}_s(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon r^3} (2\cos\vartheta \cdot \hat{r} + \sin\vartheta \cdot \hat{\vartheta}) \quad (1)$$

Γνωστό είναι, επίσης, ότι τό ίδιο δίπολο δεν δημιουργεί μαγνητικό πεδίο, δηλ.

$$\vec{B}_s(\vec{r}) = 0 \quad (2)$$

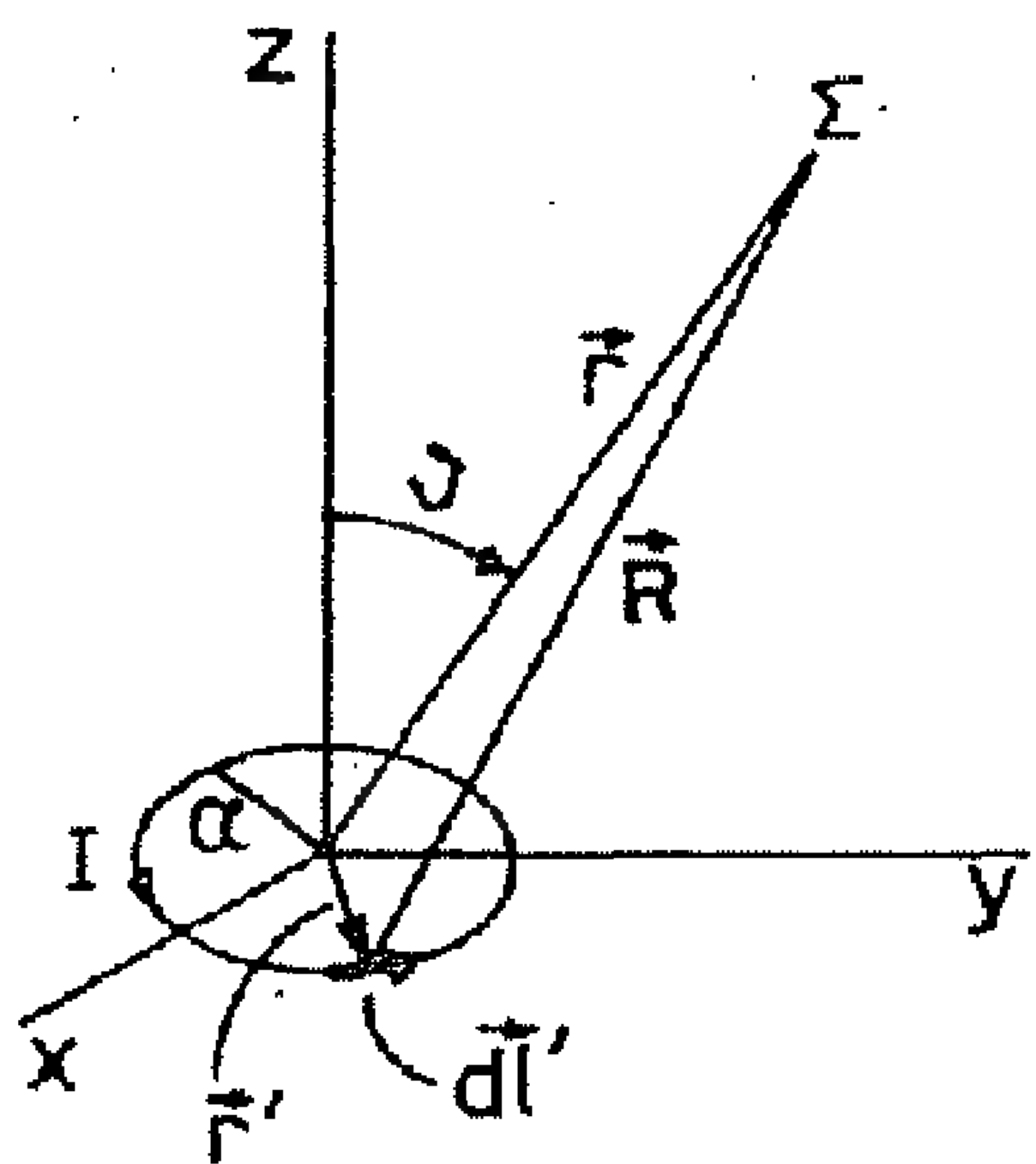
Νά αποδειχτεί ότι οι (1) και (2) μπορούν νά προκύψουν από τίς εξισώσεις των $\vec{E}(\vec{r})$ και $\vec{B}(\vec{r})$ του παλλόμενου ηλεκτρικού διπόλου (σχέσεις 3-178) σάν όριακές περιπτώσεις γιά $\omega \rightarrow 0$ (έπομένως και γιά $k \rightarrow 0$) .

3.24 Έστω ένα μαγνητικό δίπολο, πού έχει σταθερή μαγνητική ροπή \vec{m} , (στατικό μαγνητικό δίπολο). Νά προσδιοριστούν :

α. Τό διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}(\vec{r})$ σέ κάποια θέση \vec{r} μακρινή σέ σχέση μέ τίς διαστάσεις του διπόλου (πάρτε ως αρχή

των ἀξόνων τό κέντρο τοῦ διπλόου καί διευθύνη τῆς π
τήν \hat{z}) .

β. Τό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(\vec{r})$ και ή μαγνητική διέγερση $\vec{H}(\vec{r})$.



γ. Ἡ ἐξύσωση καὶ ἡ μορφή τῶν μαγνη-
τικῶν δυναμικῶν γραμμῶν.

δ. Τό μονόμετρο μαγνητικό δυναμικό
 $\Phi_m(\vec{r})$ και :

ε. Ἡ ἐξέλιξις τῶν ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν.

$$(\text{'A}\pi, \alpha, \vec{A}(\vec{r}) = \frac{m \sin \vartheta}{4\pi \mu^{-1} r^2} \hat{\varphi} = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{4\pi \mu^{-1} r^3}$$

$$\beta. \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{m}{4\pi\mu^{-1}r^3} [2\cos\vartheta \cdot \hat{r} + \sin\vartheta \cdot \hat{\vartheta}]$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \mu^{-1} \vec{B}(\vec{r})$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma. \quad r &= K \sin^2 \vartheta \\ \varphi &= C \end{aligned} \right\} \quad K, C = \text{σταθερές}$$

δηλ. ἡ μορφή τῶν δυναμικῶν γραμμῶν τοῦ στατικού
ἡλεκτρικοῦ πεδίου (βλ. πρόσβλ. 3).

$$\delta. \quad \Phi_m = \frac{m \cos \vartheta}{4 \pi \mu^{-1} r^2} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4 \pi \mu^{-1} r^3}$$

ε. Ισοδυναμικές του Α : $r^2 = C_1 \sin \vartheta$

Ισοδυναμικές του Φ_m : $r^2 = C_2 \cos \vartheta$)

3.25 Μία πολύ μικρή αντίσταση R , με κυλινδρική μορφή, έχει απώλειες Joule (N_J) αλλά ταυτόχρονα ακτινοβολεί και σαν στοιχειώδες ηλεκτρικό δίοπολο (N_{rad}). Η R βρίσκεται στον ελεύθερο χώρο και τροφοδοτείται με συχνότητα $f = 10^8$ Hz. Αν το μήκος της είναι $l = 1\text{cm}$ και η διατομή της $S = 1\text{mm}^2$, να προσδιοριστεί ο λόγος N_{rad}/N_J α) αν η ειδική αγωγιμότητα του υλικού της R είναι

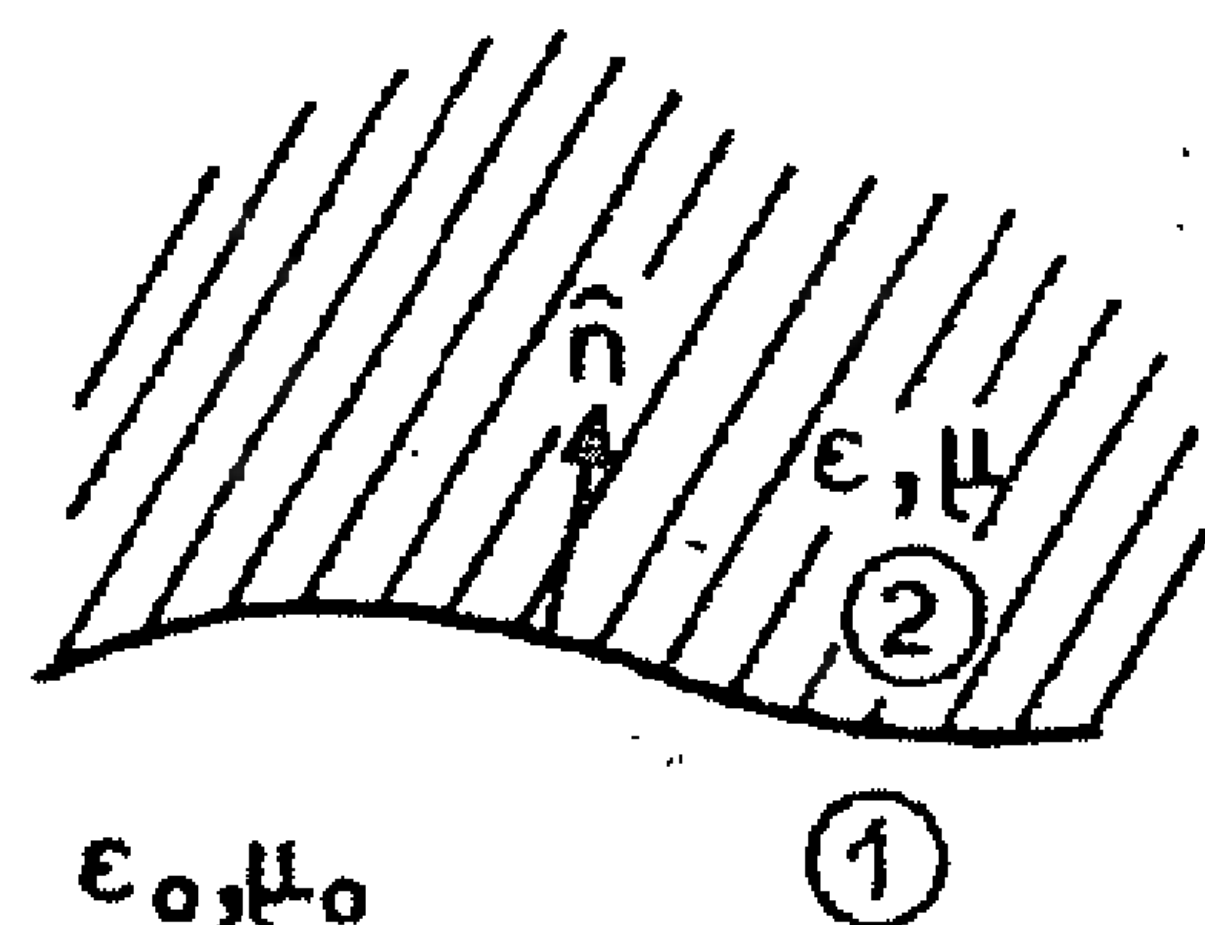
$$\sigma = 10^7 \text{ mhos/m και } \beta) \text{ αν } \sigma = 10^{-3} \text{ mhos/m (Απ.α) } 8,8 \text{ } \beta) 8,8 \cdot 10^{10}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.1 Νά θεωρήσετε τήν όριακή έπιφάνεια μεταξύ ενός άφόρτιστου διηλεκτρικού και τοῦ κενού (βλ. σχήμα)

α. "Αν \vec{E}_1 και \vec{E}_2 είναι τό ήλεκτρικό πεδίο στή μία και στήν άλλη πλευρά τῆς όριακῆς έπιφάνειας και \vec{P}_2 ή ήλεκτρική πόλωση τοῦ διηλεκτρικού, νά αποδείξετε ὅτι

$$\hat{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \hat{n} \cdot \frac{\vec{P}_2}{\epsilon_0} \quad (1)$$



β. "Αν \vec{H}_1 και \vec{H}_2 είναι ή μαγνητική διέγερση στή μία και στήν άλλη πλευρά τῆς όριακῆς έπιφάνειας και \vec{M}_2 ή μαγνητική πόλωση τοῦ ὕλικου (2) νά αποδείξετε ὅτι :

$$\hat{n} \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \hat{n} \cdot \vec{M}_2 \quad (2)$$

γ. Τί συμπεράσματα βγάξετε από τά αποτελέσματα (1) και (2);

Λ ύ σ η

$$\alpha. \text{ Είναι: } \vec{P}_2 = \vec{D}_2 - \epsilon_0 \vec{E}_2 \quad (3)$$

από ὅπου έχουμε:

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{D}_2 - \vec{P}_2}{\epsilon_0} \quad (4)$$

$$\text{'Εξάλλου είναι: } \vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_1}{\epsilon_0} \quad (5)$$

'Από τίς (4) και (5) προκύπτει:

$$\hat{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = -\hat{n} \cdot \frac{\vec{D}_2 - \vec{P}_2}{\epsilon_0} + \hat{n} \cdot \frac{\vec{D}_1}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) + \hat{n} \cdot \frac{\vec{P}_2}{\epsilon_0} \quad (6)$$

Αλλά ισχύει η όριακή συνθήκη :

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \quad (7)$$

όπου ρ_s η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου (έδω $\rho_s = 0$) .

Άρα :

$$\hat{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \hat{n} \cdot \frac{\vec{P}_2}{\epsilon_0} \quad (8)$$

β. Από τις γνωστές σχέσεις :

$$\vec{H}_2 = \mu_0^{-1} \vec{B}_2 - \vec{M}_2 \quad (9)$$

$$\vec{H}_1 = \mu_0^{-1} \vec{B}_1 \quad (10)$$

έχουμε :

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) &= \hat{n} \cdot (\mu_0^{-1} \vec{B}_1 - \mu_0^{-1} \vec{B}_2 + \vec{M}_2) = \\ &= \mu_0^{-1} (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \hat{n} + \hat{n} \cdot \vec{M}_2 \end{aligned} \quad (11)$$

Αλλά ισχύει η όριακή συνθήκη :

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (12)$$

Άρα :

$$\hat{n} \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \hat{n} \cdot \vec{M}_2 \quad (13)$$

γ. Η (1) εκφράζει ότι η ασυνέχεια, που εμφανίζεται στην κάθετη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} οφείλεται στην ηλεκτρική πόλωση του διηλεκτρικού.

Η (2) εκφράζει ότι η ασυνέχεια, που εμφανίζεται στην κάθετη συνιστώσα της μαγνητικής διέγερσης \vec{H} , οφείλεται στη μαγνητική πόλωση του διηλεκτρικού.

Επομένως, αν οι αντίστοιχες πολώσεις είναι μηδέν δεν υπάρχει ασυνέχεια .

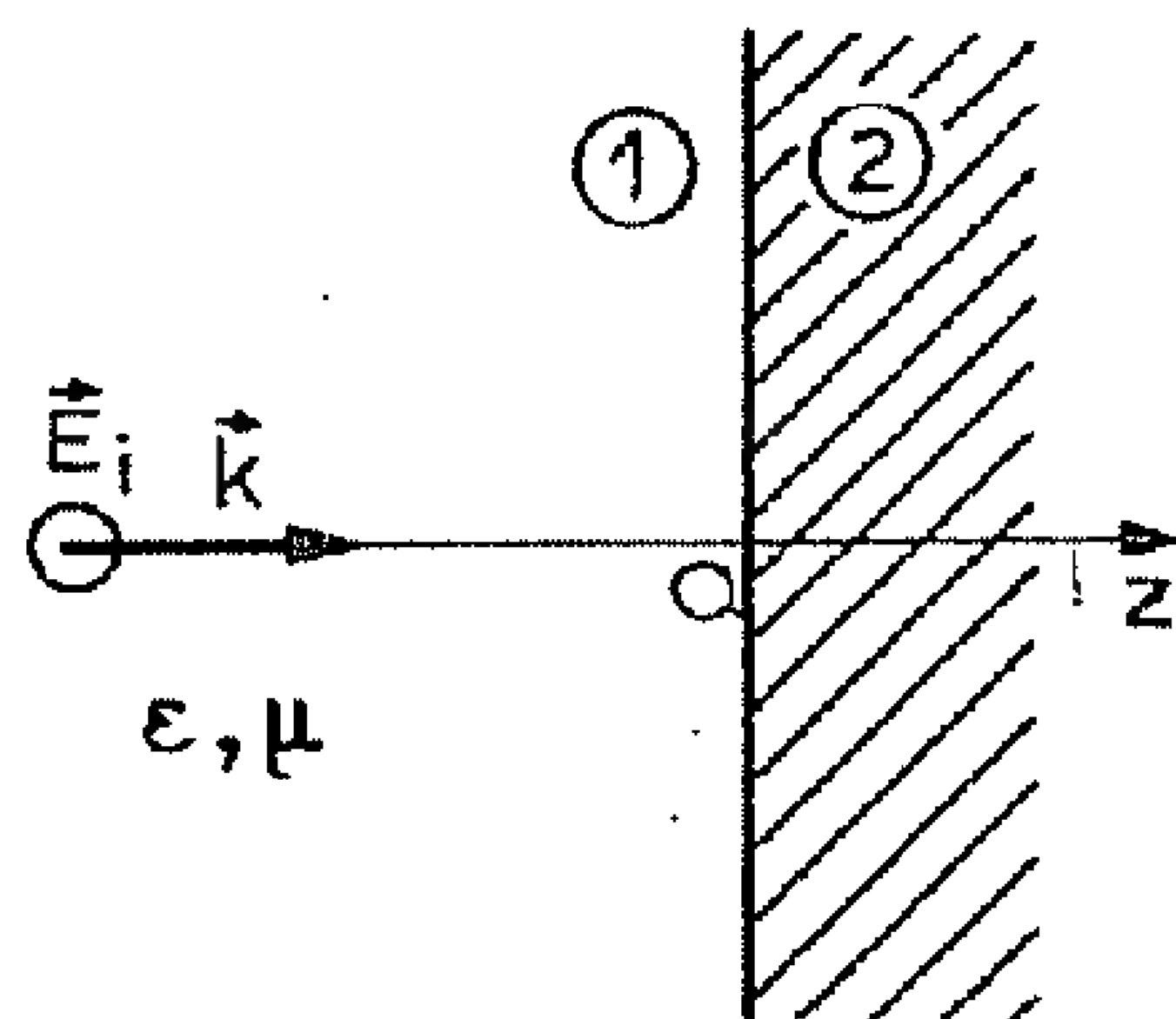
4.2 Έστω τό επίπεδο κύμα

$$\vec{E}_i = E_0 \hat{x} e^{-jkz} \quad (1)$$

πού προσπίπτει κάθετα πάνω σέ μία τέλεια αγωγική επιφάνεια ($z=0$ βλ. σχήμα).

α. Νά προσδιορίσετε τό μαγνητικό πεδίο \vec{B}_i τοῦ κύματος (1).

β. Ἐφαρμόζοντας τήν κατάλληλη συνθήκη στήν επιφάνεια $z = 0$, νά προσδιορίσετε τό ἀνακλώμενο ἠλεκτρομαγνητικό κύμα (\vec{E}_r , \vec{B}_r).



γ. Νά προσδιορίσετε τήν επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος \vec{J}_s πού ἐπάγεται πάνω στήν ἐντελῶς αγωγική επιφάνεια.

δ. Νά προσδιορίσετε τά μεγαδικά διανύσματα Poynting \vec{P}_i καί \vec{P}_r καί τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς μέσης ἀκτινοβολούμενης ἰσχύος ἀνά μονάδα επιφάνειας.

ε. Νά ἀποδείξετε ὅτι στό χῶρο (1) θά ἀποκατασταθεῖ ἕνα στάσιμο κύμα καί νά προσδιορίσετε τά χαρακτηριστικά του (πλάτος, θέσεις μεγίστων-ἐλαχίστων).

Λύση

α. Ἀπό τήν 2^η ἐξίσωση τοῦ Maxwell ἔχουμε :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_i = -j\omega \vec{B}_i \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_i &= \frac{j}{\omega} \vec{\nabla} \times \vec{E}_i = \frac{j}{\omega} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_0 e^{-jkz} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega} [-\hat{y}(jkE_0 e^{-jkz})] = \\ &= \frac{k}{\omega} E_0 e^{-jkz} \hat{y} = \frac{1}{v} E_0 e^{-jkz} \hat{y} = \sqrt{\epsilon\mu} E_0 e^{-jkz} \hat{y} \end{aligned}$$

Ωστε :

$$\boxed{\vec{B}_i = \sqrt{\epsilon\mu} E_0 \hat{y} e^{-jkz}} \quad (3)$$

β. Οι όριακές συνθήκες για το \vec{E} πάνω στην επιφάνεια είναι:

$$\hat{z} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \quad (4)$$

$$\hat{n} \cdot (\epsilon_2 \vec{E}_2 - \epsilon_1 \vec{E}_1) = \rho_s \quad (5)$$

$$\text{και} \quad \vec{E}_{2t} - \vec{E}_{1t} = 0 \quad (6)$$

Επειδή στο μέσο (2) είναι $\vec{E}_2 = 0$ και επομένως $\vec{E}_{2t} = 0$

και επειδή είναι και $\rho_s = 0$, οι (5) και (6) γίνονται:

$$\vec{E}_1 \Big|_{z=0} = 0 \quad (7)$$

Αλλά στο χώρο (1) είναι:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r \quad (8)$$

Από τις (7) και (8), για $z = 0$, έχουμε :

$$0 = \vec{E}_i(0) + \vec{E}_r(0) \quad (9)$$

και από την (1) προκύπτει:

$$\vec{E}_r(0) = -\vec{E}_i(0) = -E_0 \hat{x} \quad (10)$$

Τό \vec{E}_r είναι επίπεδο κύμα, που διαδίδεται κατά τη διεύθυνση $-\hat{z}$ και είναι πολωμένο κατά τη διεύθυνση \hat{x}

$$\vec{E}_r = E_{or} e^{jkz} \hat{x} \quad (11)$$

Από τις (10), (11) προκύπτει:

$$E_{or} = -E_0 = E_0 e^{j\pi} \quad (12)$$

Ωστε :

$$\boxed{\vec{E}_r = -E_0 \hat{x} e^{jkz} = E_0 \hat{x} e^{j(kz+\pi)}} \quad (13)$$

και

$$\vec{E}_1 = E_0 e^{-jkz} \hat{x} - E_0 e^{jkz} \hat{x} \quad (14)$$

Προκειμένου για το μαγνητικό πεδίο έχουμε :

$$\vec{B}_r = \frac{j}{\omega} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -E_0 e^{jkz} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega} [-\hat{y} (jk E_0 e^{jkz})] = \frac{k}{\omega} E_0 e^{jkz} \hat{y} =$$

$$= \frac{1}{v} E_0 e^{jkz} \hat{y} = \sqrt{\epsilon \mu} E_0 \hat{y} e^{jkz}$$

Όστε

$$\boxed{\vec{B}_r = \sqrt{\epsilon \mu} E_0 \hat{y} e^{jkz}} \quad (15)$$

παρατηρούμε ότι ενώ το \vec{E} κατά την ανάκλαση αλλάζει κατά 180° τη φάση του το \vec{B} δεν παθαίνει καμιά αλλαγή φάσης.

γ. Η όριακή συνθήκη για την εφαπτομενική συνιστώσα της μαγνητικής διέγερσης \vec{H} , πάνω στην επιφάνεια $z = 0$, είναι:

$$\hat{z} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s \quad (16)$$

$$\text{'Αλλά είναι: } \vec{H}_2 = 0 \quad (17)$$

$$\text{'Όστε: } \vec{H}_1 \times \hat{z} \Big|_{z=0} = \vec{J}_s \quad (18)$$

$$\text{'Αλλά } \vec{H}_1 \Big|_{z=0} = \vec{H}_i + \vec{H}_r \Big|_{z=0} = \frac{\vec{B}_i + \vec{B}_r}{\mu} \Big|_{z=0} \quad (19)$$

Από τις (3), (15), (18) και (19) έχουμε :

$$\vec{J}_s = \left[\frac{\sqrt{\epsilon \mu} E_0 \hat{y} (e^{-jkz} + e^{jkz})}{\mu} \right]_{z=0} \times \hat{z} = \left[\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 \hat{y} \right] \times \hat{z} =$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 (\hat{y} \times \hat{z}) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 \hat{x}$$

$$\text{'Όστε: } \vec{J}_s = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 \hat{x} = \frac{E_0}{Z} \hat{x} \quad (20)$$

$$\text{όπου: } Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (21)$$

ή κυματική αντίσταση του μέσου (ϵ, μ) .

Δηλαδή η πραγματική πυκνότητα ρεύματος είναι:

$$\vec{J}_s = \frac{E_0}{Z} \cos \omega t \hat{x} \quad (22)$$

καί ἔχει τή διεύθυνση τῆς πόλωσης (\hat{x}) τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου.

δ. Τό \vec{P} γενικά ὀρίζεται :

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B}^* \quad (23)$$

Ἀπό τίς (1) καί (3) προκύπτει :

$$\vec{P}_i = \frac{1}{\mu} \sqrt{\epsilon \mu} E_0^2 \hat{x} \times \hat{y} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \hat{z} \quad (24)$$

Ἀντίστοιχα, ἀπό τίς (13) καί (15) προκύπτει :

$$\vec{P}_r = -\frac{1}{\mu} \sqrt{\epsilon \mu} E_0^2 \hat{x} \times \hat{y} = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \hat{z} \quad (25)$$

$$\text{Ὡστε} \quad \vec{P}_r = -\vec{P}_i \quad (26)$$

Οἱ ζητούμενες τιμές ἰσχύος εἶναι , ἀντίστοιχα , :

$$\bar{P}_i = |\bar{P}_i| = \left| \frac{1}{2} \operatorname{Re} \vec{P}_i \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \quad (27)$$

$$\bar{P}_r = |\bar{P}_r| = \left| \frac{1}{2} \operatorname{Re} \vec{P}_r \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \quad (28)$$

Δηλαδή κατὰ τήν κάθετη πρόσπτωση ἐπίπεδου ΗΜ κύματος πάνω σέ ἐντελῶς ἀγωγίμη ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, ὅση ἰσχύς προσπίπτει τόση καί ἀνακλᾶται χωρίς καμιά ἀπώλεια .

ε. Σέ κάθε σημείο μπροστά ἀπὸ τήν ἀγωγίμη ἐπιφάνεια $z = 0$ δέν ἔχουμε σ υ ν ο λ ι κ ᾶ συνεχή ροή ἰσχύος οὔτε πρὸς τήν \hat{z} οὔτε πρὸς τήν $-\hat{z}$ διεύθυνση, πράγμα πού σημαίνει ὅτι δέν ἔχουμε συνολικό τρέχον κύμα. Πράγματι, αὐτό προκύπτει καί ἀπό τή (14) :

$$\vec{E}_1 = E_0 \hat{x} (e^{-jkz} - e^{jkz}) = -2jE_0 \sin kz \cdot \hat{x} \quad (29)$$

άπό όπου προκύπτει ότι τό πραγματικό πεδίο \vec{E}_1 είναι

$$\vec{E}_1 = \text{Re}(\vec{E}_1 e^{j\omega t}) = 2E_0 \hat{x} \sin kz \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (30)$$

Η (30) παριστάνει σ τ ά σ ι μ ο κ ύ μ α μέ πλάτος $2E_0 \sin kz$, πού αύξομειώνεται ήμλιτονικά πάνω στόν άξονα τών z , μεταξύ τής τιμής 0, πού παίρνει στά σημεία όπου

$$k|z| = m\pi \quad (31)$$

$$\text{ή} \quad |z| = m \frac{\lambda}{2} \quad (m=0,1,2,\dots) \quad (32)$$

καί τής τιμής $2E_0$, πού παίρνει στά σημεία όπου :

$$k|z| = n \frac{\pi}{2} \quad (n=1,3,5,\dots) \quad (33)$$

$$\text{ή} \quad |z| = n \frac{\lambda}{4} \quad (n=1,3,5,\dots) \quad (34)$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η : Στις ύψηλές συχνότητες κι ένας πραγματικός άγωγός συμπεριφέρεται περίπου σάν τέλειος άγωγός. Τότε τό επιφανειακό ρεύμα \vec{J}_s , στην πράξη, περνά από ένα λεπτό στρώμα μέ πάχος x_0 ίσο μέ τό βάθος διείσδυσης, ή αντίσταση του οποίου προκαλεί απώλεια ισχύος (βλ. παρακάτω πρόβλημα 4-4).

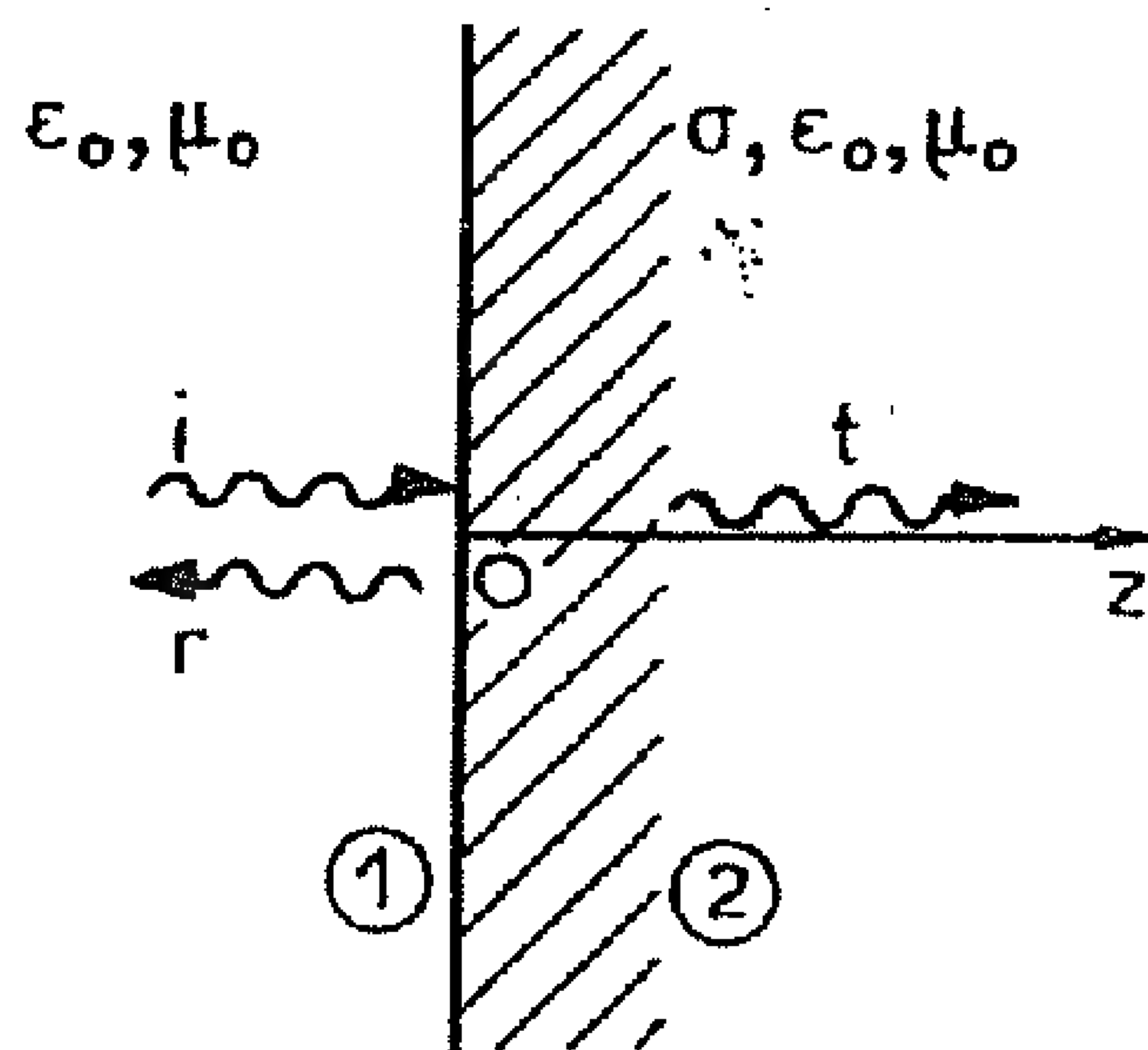
4.3 Μελέτη κάθετης πρόσπτωσης κύματος σε επίπεδη επιφάνεια πραγματικού άγωγού (μέ απώλειες).

Έστω τό επίπεδο κύμα

$$\vec{E}_i = E_{i0} e^{-jk_0 z} \hat{x} \quad (1)$$

πού πέφτει κάθετα στην επίπεδη επιφάνεια $z = 0$ (βλ. σχήμα) ενός πραγματικού άγωγού. Ένα μέρος από τό κύμα αυτό περνά μέσα στόν άγωγό :

$$\vec{E}_t = E_{t0} e^{-\gamma z} \hat{x} \quad (2)$$



όπου :

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu_0\sigma} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

ή σταθερά μεταδόσεως μέσα στον άγωγό, ενώ ένα άλλο μέρος του ανάκλāται και επιστρέφει μέσα στο ύλικό (1) :

$$\vec{E}_r = E_{r0} e^{jk_0 z} \hat{x} \quad (3)$$

α. "Αν Z_0 και Z_c είναι οι κυματικές αντίστάσεις του ύλικου (1) και του ύλικου (2) (βλ. προβλ. 3.14) να προσδιοριστούν τά πεδία \vec{H}_i , \vec{H}_t και \vec{H}_r που αντιστοιχοῦν στά πεδία των (1), (2) και (3).

β. Εφαρμόζοντας τις κατάλληλες όριακές συνθήκες να αποδειχτεί ότι ο " συντελεστής ανάκλάσεως " ρ που ορίζεται από τή σχέση $E_{r0} = \rho E_{i0}$, και ο " συντελεστής μεταδόσεως " τ , που ορίζεται από τή σχέση $E_{t0} = \tau E_{i0}$ μπορούν να προσδιοριστούν από τις σχέσεις :

$$\rho = \frac{Z_c - Z_0}{Z_c + Z_0} \quad \tau = \frac{2Z_c}{Z_c + Z_0} \quad (4)$$

γ. Να αποδειχτεί ότι τό μέσο διάνυσμα Poynting (\vec{P}_t) μόλις μέσα στην άγωγίμη έπιφάνεια $z = 0$, του οποίου τό μέτρο έκφράζει τήν ίσχύ ανά μονάδα, έπιφάνειας, που είσχωρεῖ και χάνεται μέσα στον άγωγό είναι :

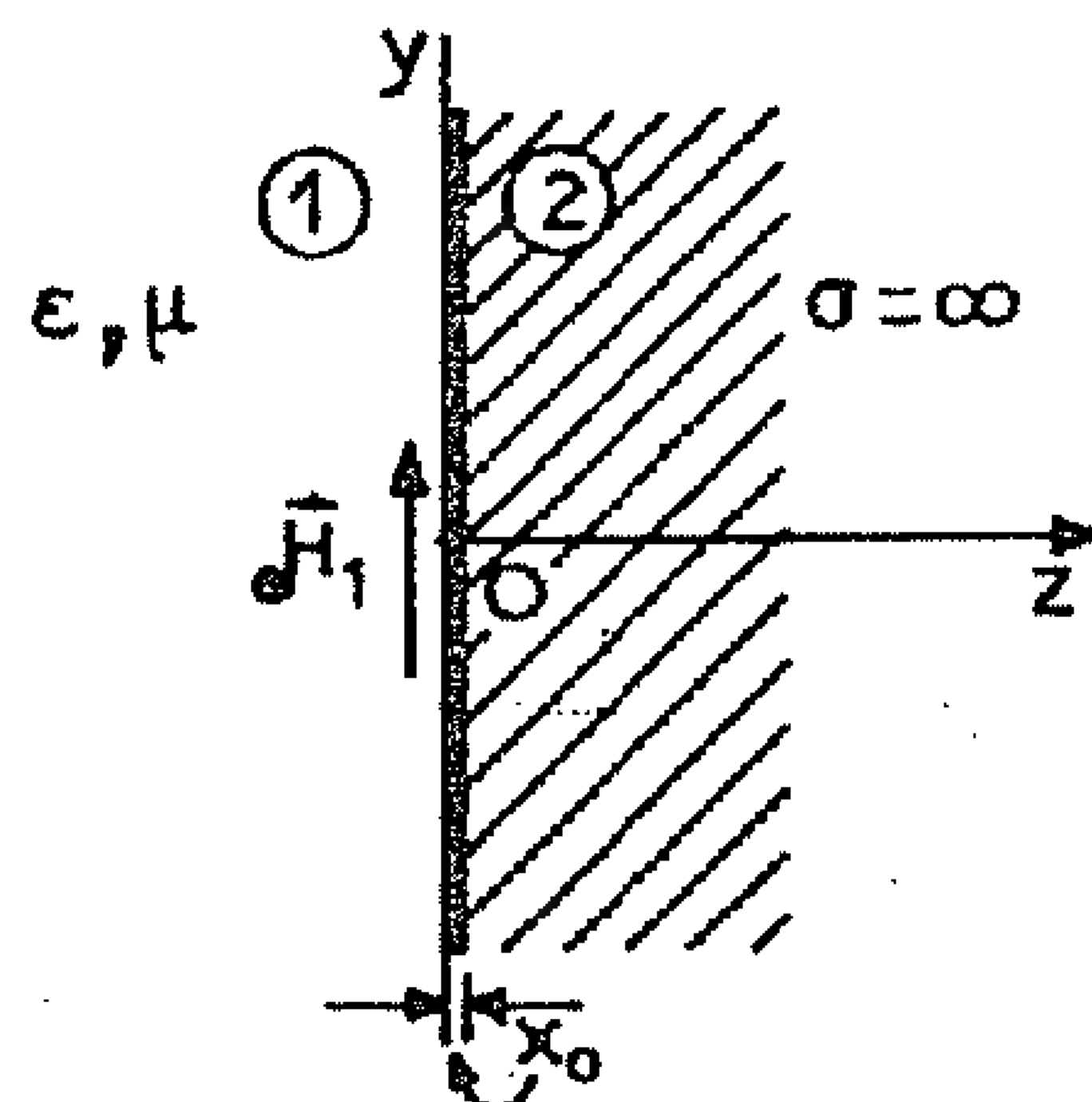
$$\vec{P}_t = \frac{1}{2} |\tau E_{i0}|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{Z_c} \right) \hat{z} = \frac{1}{2} |H_{10}|^2 \operatorname{Re} Z_c \hat{z} \quad (5)$$

όπου $H_{10} = H_{i0} + H_{r0} = H_{t0}$ είναι ο phasor του συνολικού πεδίου \vec{H}_1 μέσα στο ύλικό (1) και μπροστά ακριβώς στην έπιφάνεια του άγωγου και ο όποιος στην πράξη (γιά $\sigma \gg \omega\epsilon$) μπορεί να ληφθεῖ $H_{10} = 2H_{i0}$.

4.4 Έστω ότι μπροστά στην επίπεδη επιφάνεια ($z=0$) ενός πραγματικού αγωγού (βλ. σχ. 1) υπάρχει το επαπτομενικό πεδίο

$$\vec{H}_1 = \text{Re}(\vec{H}_{10} e^{j\omega t}) \hat{y} \quad (1)$$

Αν η συχνότητα είναι υψηλή μπορεί κανένας να θεωρήσει ότι η επίδραση του πεδίου μέσα στον αγωγό εκτείνεται μόνο σε ένα λεπτό επιφανειακό στρώμα με πάχος ίσο με το βάθος διείσδυσης x_0 και ότι ο υπόλοιπος αγωγός συμπεριφέρεται σαν τέλειος αγωγός. Ωστε μέσα από το επιφανειακό αυτό στρώμα περνά το επαγόμενο ρεύμα με επιφανειακή πυκνότητα \vec{J}_S .

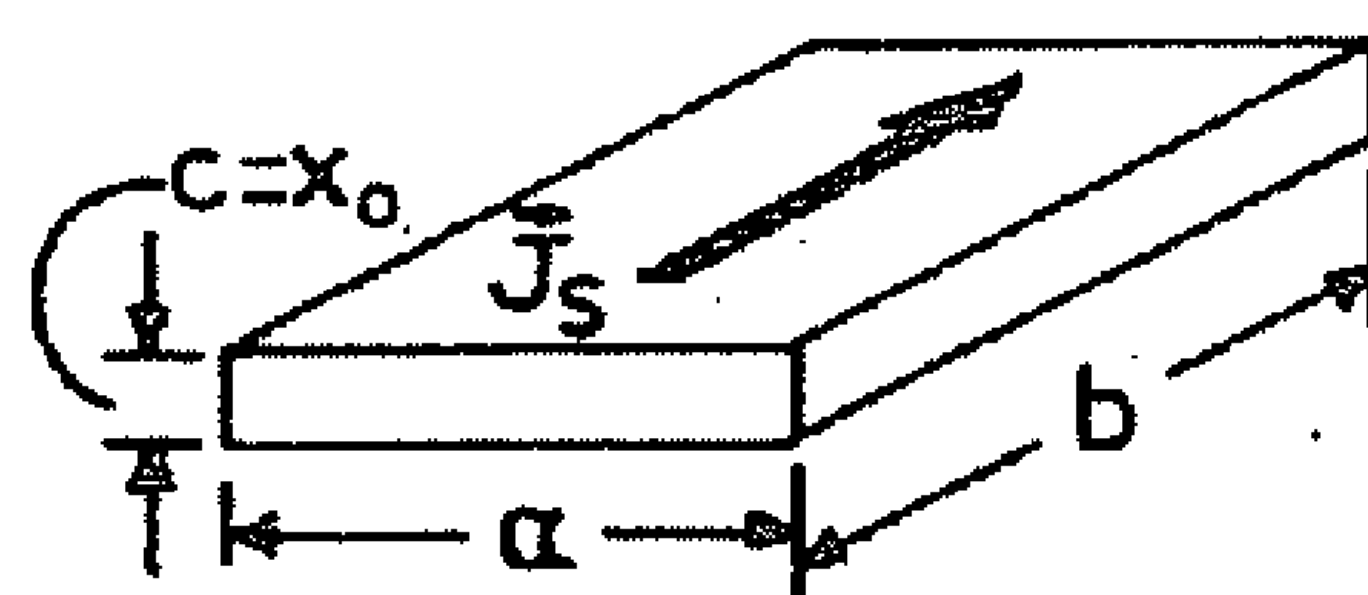


Σχ. 1

α. Με την παραπάνω θεώρηση να αποδειχτεί ότι η όριακή συνθήκη της μαγνητικής διέγερσης παίρνει τη μορφή :

$$\vec{\mathcal{E}}_{S0} = -\hat{z} \times \vec{H}_{10} = H_{10} \hat{x} \quad (2)$$

β. Θεωρώντας μία επιφανειακή πλάκα του αγωγίμου υλικού (βλ. σχ. 2) διαστάσεων $a \times b \times c$ (όπου $c=x_0$) να αποδειχτεί ότι η απώλεια ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας του αγωγού μπορεί να υπολογιστεί με τη σχέση :



Σχ. 2

$$\bar{P} = \frac{1}{2} |\vec{H}_{10}|^2 R_S = \frac{1}{2} |\vec{H}_{10}|^2 \text{Re} Z_c \quad (3)$$

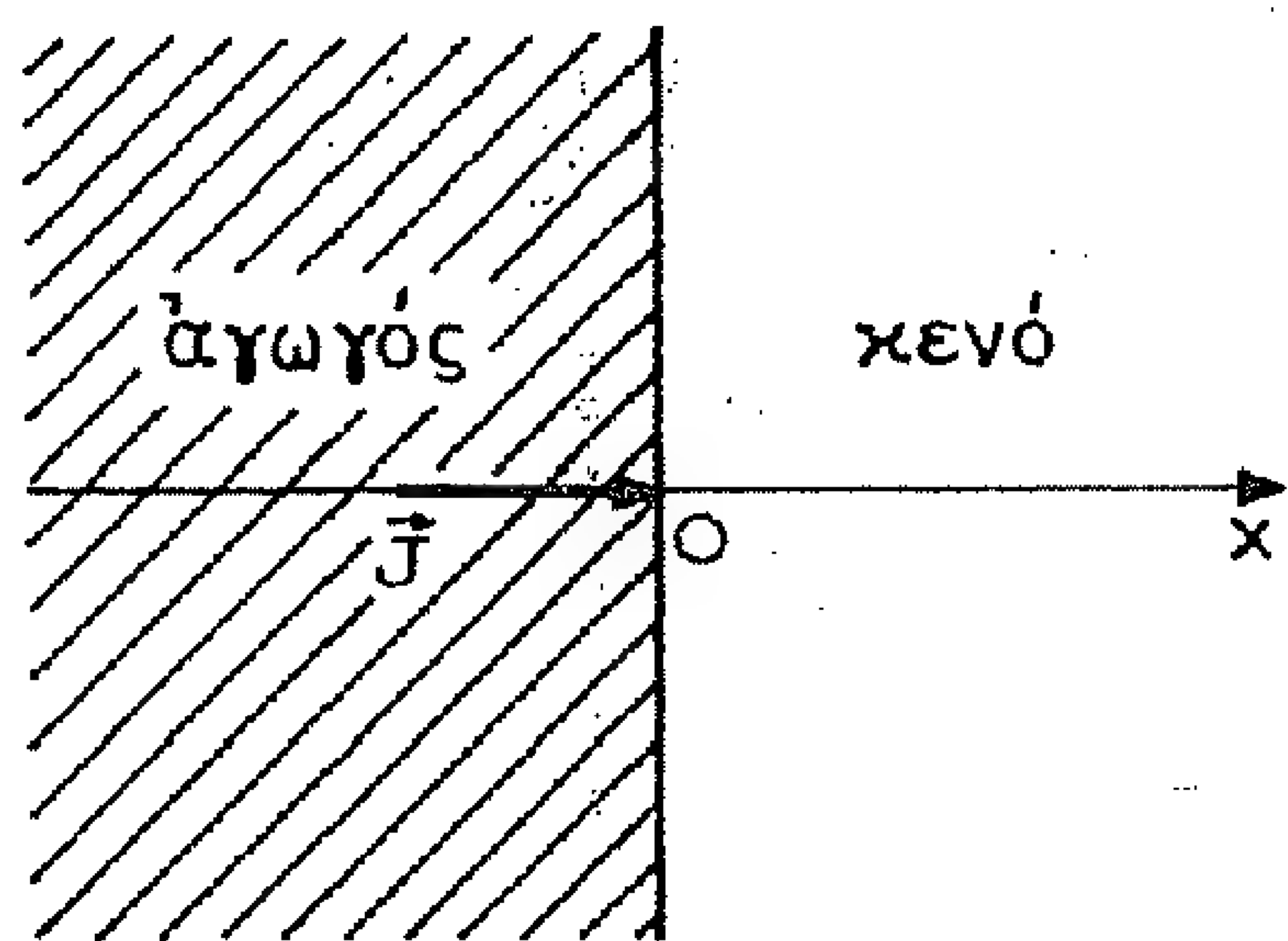
όπου R_S η επιδερμική αντίσταση και Z_c η χυματική αντίσταση του αγωγίμου υλικού (βλ. προβλ. 3.14)

γ. Να παραβληθεί η (3) με την (5) του προβλ. 4.3 .

4.5 Έστω ένας αγωγικός ημιχώρος $x < 0$ (βλ. σχήμα), μέσα στον οποίο υπάρχει ένα εναλλασσόμενο ρεύμα αγωγής που έχει πυκνότητα :

$$\vec{J} = J_0 \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (1)$$

και σταματά στην επιφάνεια $x = 0$. Να προσδιοριστεί η ένταση \vec{E} του ηλεκτρικού πεδίου στον ημιχώρο $x > 0$ με δύο τρόπους. Δηλαδή:



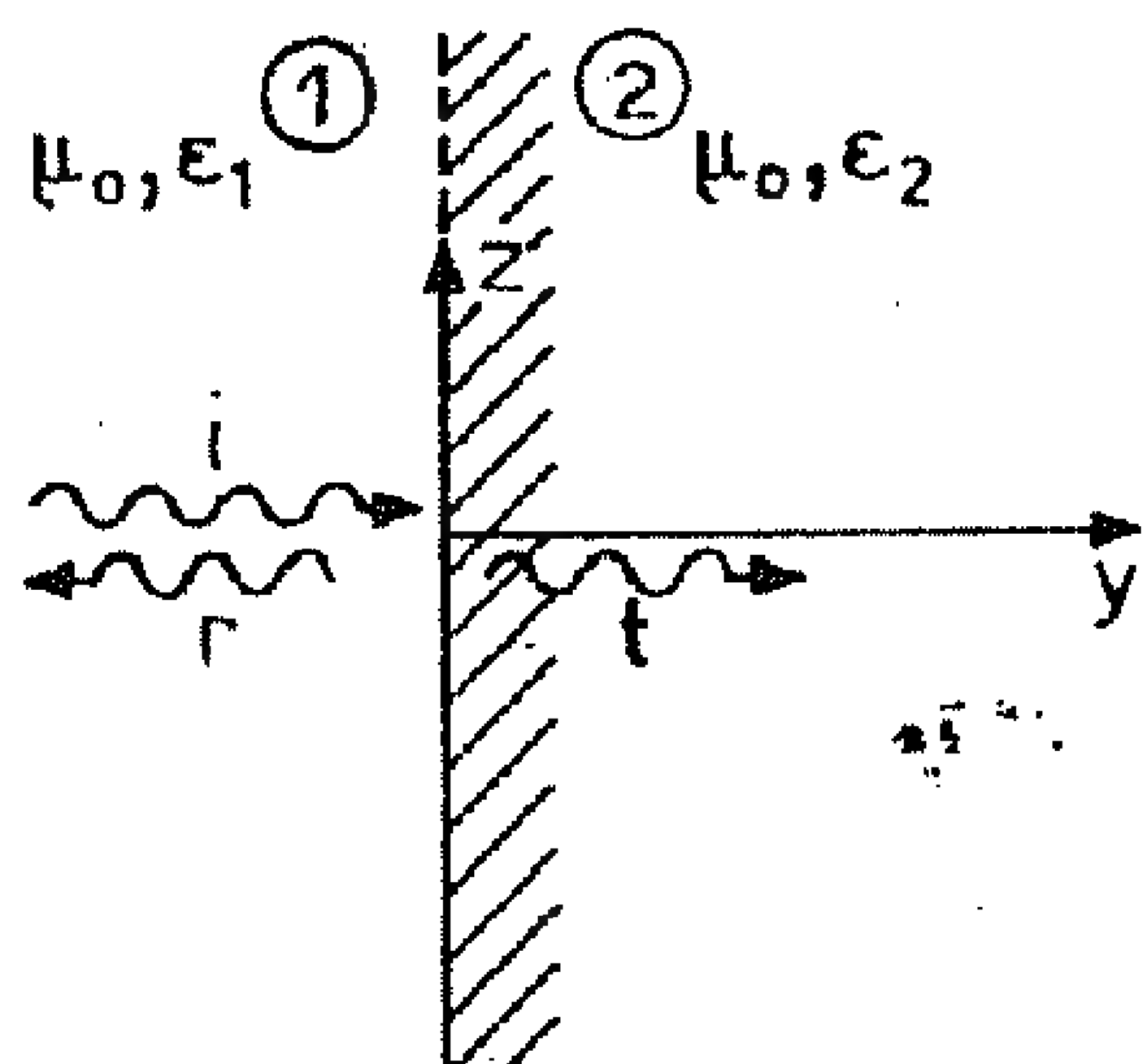
α. Προσδιορίζοντας πρώτα, από την εξίσωση της συνέχειας και το νόμο του Gauss την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ρ_s πάνω στην επιφάνεια $x = 0$ και εφαρμόζοντας την

κατάλληλη οριακή συνθήκη και

β. Εξισώνοντας το ρεύμα αγωγής του ημιχώρου $x < 0$ με το ρεύμα μετατόπισης του ημιχώρου $x > 0$.

(Απ. α και β :
$$\vec{E} = \frac{J_0 \hat{x}}{\omega \epsilon_0} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$
)

4.6 Το επίπεδο xz είναι η διαχωριστική επιφάνεια δύο τέλειων διηλεκτρικών υλικών με μαγνητική διαπερατότητα μ_0 και διηλεκτρικές σταθερές ϵ_1, ϵ_2 , αντίστοιχα (βλ. σχήμα).



Πάνω στην οριακή επιφάνεια πέφτει κάθετα από την πλευρά του υλικού (1) τό κύμα :

$$\vec{E}_i(y, t) = E_{i0} \hat{x} e^{j(\omega t - k_1 y)} \quad (1)$$

όπου
$$k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_0} \quad (2)$$

και ένα μέρος απ' αυτό (\vec{E}_t) περνά στο υλικό (2), ενώ ένα άλλο μέρος (\vec{E}_r)

ἀνακλᾶται.

α. Νά προσδιορίσετε τὰ φασικά διανύσματα (Phasors) \vec{E}_i καὶ \vec{B}_i τοῦ κύματος (1)

β. Ἄν E_{i0} , E_{r0} , καὶ E_{t0} εἶναι οἱ τιμές τῶν phasors τῶν τριῶν κυμάτων στό ἐπίπεδο $y = 0$, νά προσδιορίσετε τοὺς λόγους $\rho = (E_{r0}/E_{i0})$ καὶ $\tau = (E_{t0}/E_{i0})$ σέ συνάρτηση μέ τὰ ϵ_1 καὶ ϵ_2 (ρ εἶναι ὁ συντελεστής ἀνακλάσεως ἐνῶ τ ὁ συντελεστής μεταδόσεως).

γ. Νά ὑπολογίσετε τὸ ποσοστὸ τῆς ἰσχύος τοῦ κύματος (1) περνᾷ στό μέσο (2) καὶ τὸ ποσοστὸ ἀνακλᾶται στήν ὁριζική ἐπιφάνεια καὶ ξαναγυρίζει στό μέσο (1). (Θέμα ἐξετάσεων Ὀκτωβρίου 1977).

(Ἀπ. α. $\vec{E}_i = E_{i0} e^{-jk_1 y} \hat{x}$, $\vec{B}_i = -\frac{1}{\omega} k_1 E_{i0} e^{-jk_1 y} \hat{z}$

β. $\rho = \left(1 - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}\right) / \left(1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}\right)$

$\tau = 2 / \left(1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}\right)$

γ. $\bar{P}_t / \bar{P}_i = \tau^2$, $\bar{P}_r / \bar{P}_i = \rho^2$)

$\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \cdot \tau$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5.1. Στήν πράξη, οἱ κατασκευαστές κυματοδηγῶν τηροῦν συνήθως τὴν ἀκόλουθη σχέση μεταξύ τῶν ἐσωτερικῶν ἐγκαρσίων διαστάσεων ἑνὸς ὀρθογώνιου κυματοδηγοῦ:

$$w = 2d \quad (1)$$

ὑποθέτοντας ὅτι τηρεῖται ἡ σχέση αὕτη:

α. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι στὸν ὀρθογώνιο κυματοδηγὸ ὁ κυματικός τύπος TE_{10} ἔχει τὸ μεγαλύτερο ὀρικό μῆκος κύματος ἀπὸ ὅλους τοὺς ἄλλους τύπους TE_{mn} καὶ ἀκολουθοῦν οἱ

κυματικοί τύποι TE_{01} και TE_{20} και στη συνέχεια όλοι οι άλλοι τύποι.

- β. Νά υπολογιστεί η περιοχή τιμών των διαστάσεων w και d του κυματοδηγού, που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να κυματοδηγήσουμε τον κυματικό τύπο TE_{10} στη συχνότητα $f_0 = 6 \text{ GHz}$ και μιά περιοχή της $\pm 20\%$ πάνω και κάτω απ' αυτήν (τό δηλετρικό του κυματοδηγού είναι αέρας).

Λύση

- α. Εφαρμόζοντας την (1) στη γνωστή σχέση:

$$\frac{1}{\lambda_{mn,op}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2}{w^2} + \frac{n^2}{d^2}} \quad (2)$$

έχουμε:

$$\lambda_{mn,op} = \frac{w}{\sqrt{\frac{m^2}{4} + n^2}} \quad (3)$$

Μελετώντας την (3) συμπεραίνουμε ότι το μεγαλύτερο όρικό μήκος κύματος τό έχει ο κυματικός τύπος TE_{10} και ακολουθούν άμέσως οι TE_{01} και TE_{20} :

$$\lambda_{10,op} = 2w \quad (4)$$

$$\lambda_{01,op} = \lambda_{20,op} = w \quad (5)$$

Όλοι οι άλλοι τύποι έχουν μικρότερο λ_{op} .

- β. Για να διαδίδεται ένα μήκος κύματος λ μέσα στον κυματοδηγό πρέπει να είναι $\lambda < \lambda_{op}$, ενώ για να μη διαδίδεται πρέπει να είναι $\lambda > \lambda_{op}$.

Από τά αποτελέσματα του προηγούμενου έρωτήματος, προκύπτει ότι για να διαδίδεται στον κυματοδηγό μόνο ο κυματικός τύπος TE_{10} και κανένας άλλος,

πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι :

$$\lambda_{01,op} < \lambda < \lambda_{10,op} \quad (6)$$

$$\eta \quad w < \lambda < 2w \quad (7)$$

Ἡ (7) μπορεῖ νὰ γραφεῖ καὶ ἔτσι :

$$\frac{\lambda}{2} < w < \lambda \quad (8)$$

Ἄν ἀντὶ γιὰ τὸ λ χρησιμοποιήσουμε τὴ συχνότητα f ἢ (8) γίνεται :

$$\frac{c}{2f} < w < \frac{c}{f} \quad (9)$$

Οἱ συχνότητες πού θέλουμε νὰ περνοῦν μέσα ἀπὸ τὸν κυματοδηγό εἶναι ἀπὸ

$$f_1 = 0,8 f_0 = 4,8 \text{ GHz} \quad \text{ἔως} \quad f_2 = 1,2 f_0 = 7,2 \text{ GHz} .$$

Ἡ (9) πρέπει νὰ ἰσχύει γιὰ ὅλες τὶς συχνότητες μεταξύ τῶν f_1 καὶ f_2 . Ἀρκεῖ νὰ εἶναι λοιπὸν :

$$\frac{c}{2f_1} < w < \frac{c}{f_2} \quad (10)$$

Ἀντικαθιστώντας τὰ f_1 , f_2 καὶ c στὴ (10) ἔχουμε :

$$3,12 \text{ cm} < w < 4,17 \text{ cm} \quad (11)$$

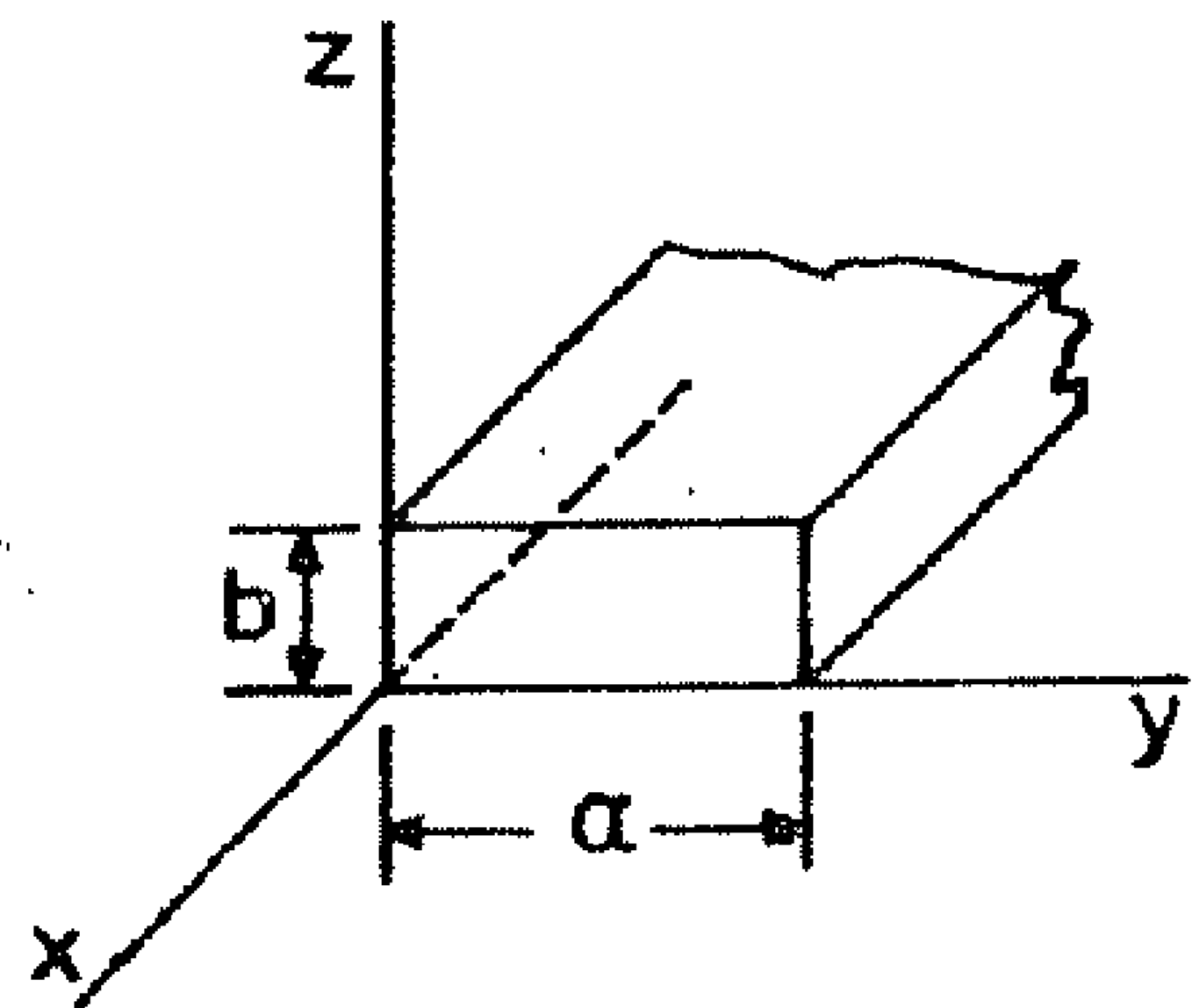
Ἡ (11) μαζί μὲ τὴν (1) δύνουν ὅλες τὶς δυνατές τιμές w καὶ d πού μπορούμε νὰ χρησιμοποιήσουμε . Π.χ. μπορούμε νὰ χρησιμοποιήσουμε $w = 3,5 \text{ cm}$ καὶ $d = 1,75 \text{ cm}$ ἢ $w = 4 \text{ cm}$ καὶ $d = 2 \text{ cm}$.

5.2 Οἱ ἐσωτερικὲς ἐγκάρσιες διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογώνιου κυματοδηγοῦ εἶναι a καὶ b (βλ. σχῆμα) .

Ὁ κυματικὸς τύπος, πού μεταδίδει ὁ κυματοδηγὸς ἔχει ἠλεκτρικὲς προβολές :

$$E_y = A \sin \frac{\pi z}{b} e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (1)$$

$$E_x = E_z = 0 \quad (2)$$



- α. Ποιός κυματικός τύπος είναι αυτός;
 β. Νά προσδιοριστούν οι υπόλοιπες προβολές του (H_x, H_y, H_z) .
 γ. Νά δοθεῖ ἡ γραφικὴ παράσταση $\beta^2 = f(\frac{1}{b^2})$
 Δίνονται τὰ $\epsilon, \mu, \omega, \alpha, b, A$.

Λύση

- α. Ἀφοῦ $E_x = 0$ πρόκειται γιὰ τύπο TE_{mn} . Κατὰ τὸν ἄξονα y δὲν ἔχουμε διακύμανση τοῦ πεδίου, ἄρα $m=0$.
 Κατὰ τὸν ἄξονα z ἔχουμε μισή ἡμιτονοειδή διακύμανση (τὸ πηλὺκο $\frac{\pi z}{b}$ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως π), ἄρα $n=1$.
 Πρόκειται λοιπὸν γιὰ τὸν κυματικὸν τύπο $TE_{01}(H_{01})$

- β. Ἀπὸ τὴ θεωρία (σχέσεις (5-57)) ἔχουμε γιὰ τὴν E_y
 γενικά:

$$E_y = \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} H_0 \cos \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{n\pi z}{b} e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (3)$$

πού γιὰ $m = 0$ καὶ $n=1$ γίνεταί:

$$E_y = \frac{j\omega\mu\pi}{k_c^2 b} H_0 \sin \frac{\pi z}{b} e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (4)$$

Ταυτίζοντας τὴν (1) μέ τὴν (4) ἔχουμε :

$$A = \frac{j\omega\mu\pi H_0}{k_c^2 b} \quad (5)$$

$$\text{ἢ} \quad H_0 = \frac{k_c^2 b A}{j\omega\mu\pi} \quad (6)$$

Ἀπὸ τὴ θεωρία, ἐπίσης, ξέρουμε ὅτι οἱ προβολές τοῦ \vec{H} εἶναι (γιὰ $m = 0$, $n = 1$) :

$$\left. \begin{aligned} H_x &= H_0 \cos \frac{\pi z}{b} e^{j(\omega t - \beta x)} \\ H_y &= 0 \\ H_z &= \frac{j \beta \pi}{k_c^2 b} H_0 \sin \frac{\pi z}{b} e^{j(\omega t - \beta x)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Χρησιμοποιώντας την (6) έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \frac{k_c^2 b A}{j \omega \mu \pi} \cos \frac{\pi z}{b} e^{j(\omega t - \beta x)} \\ H_z &= \frac{j \beta \pi}{k_c^2 b} \frac{k_c^2 b A}{j \omega \mu \pi} \sin \frac{\pi z}{b} e^{j(\omega t - \beta x)} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Αλλά

$$k_c^2 = k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{m \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b} \right)^2 = \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \quad (9) \quad \text{καί}$$

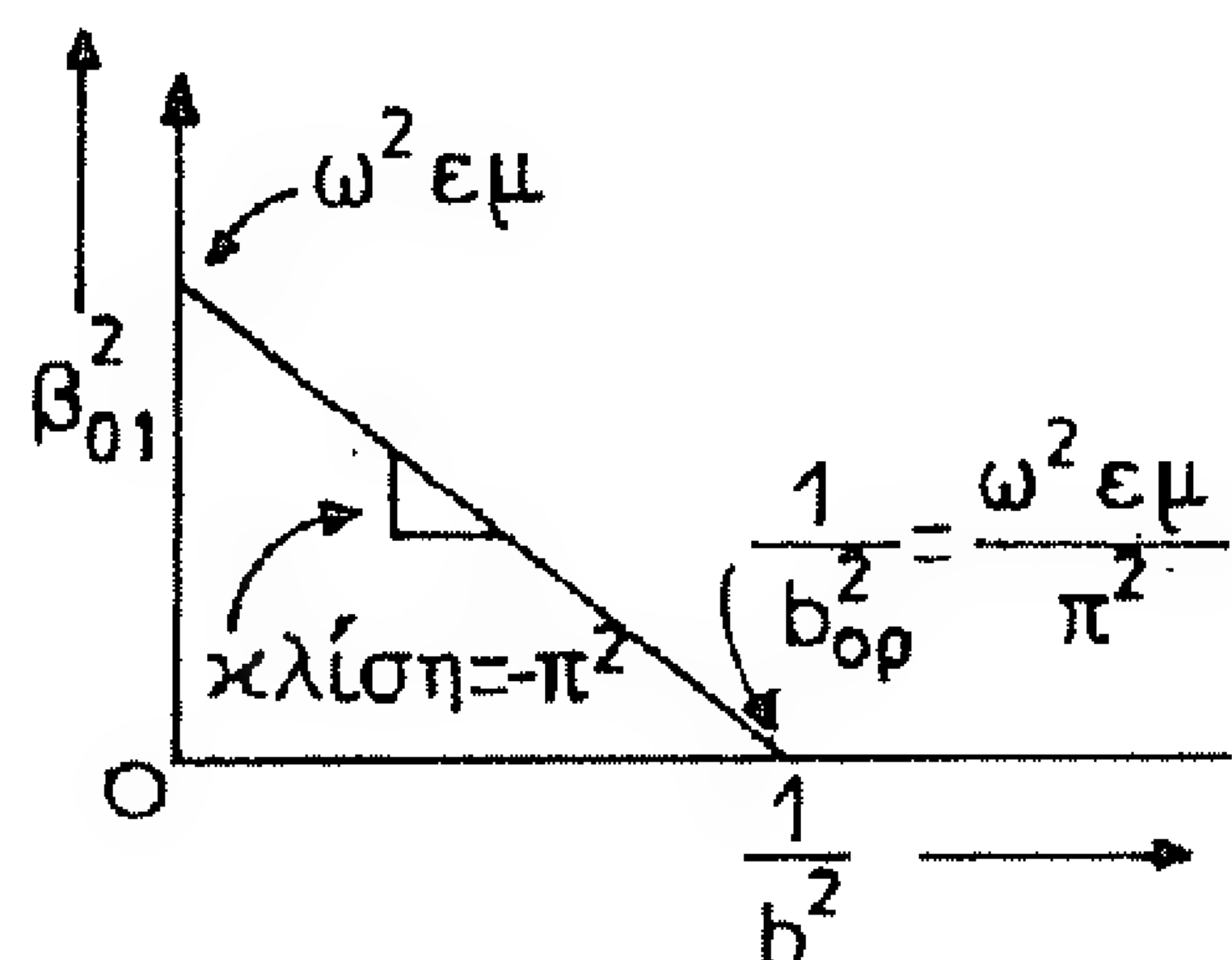
$$\beta \equiv \beta_{01} = \sqrt{\frac{\omega^2}{u^2} - \frac{\pi^2}{b^2}} = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - \frac{\pi^2}{b^2}} \quad (10)$$

Ωστε, τελικά:

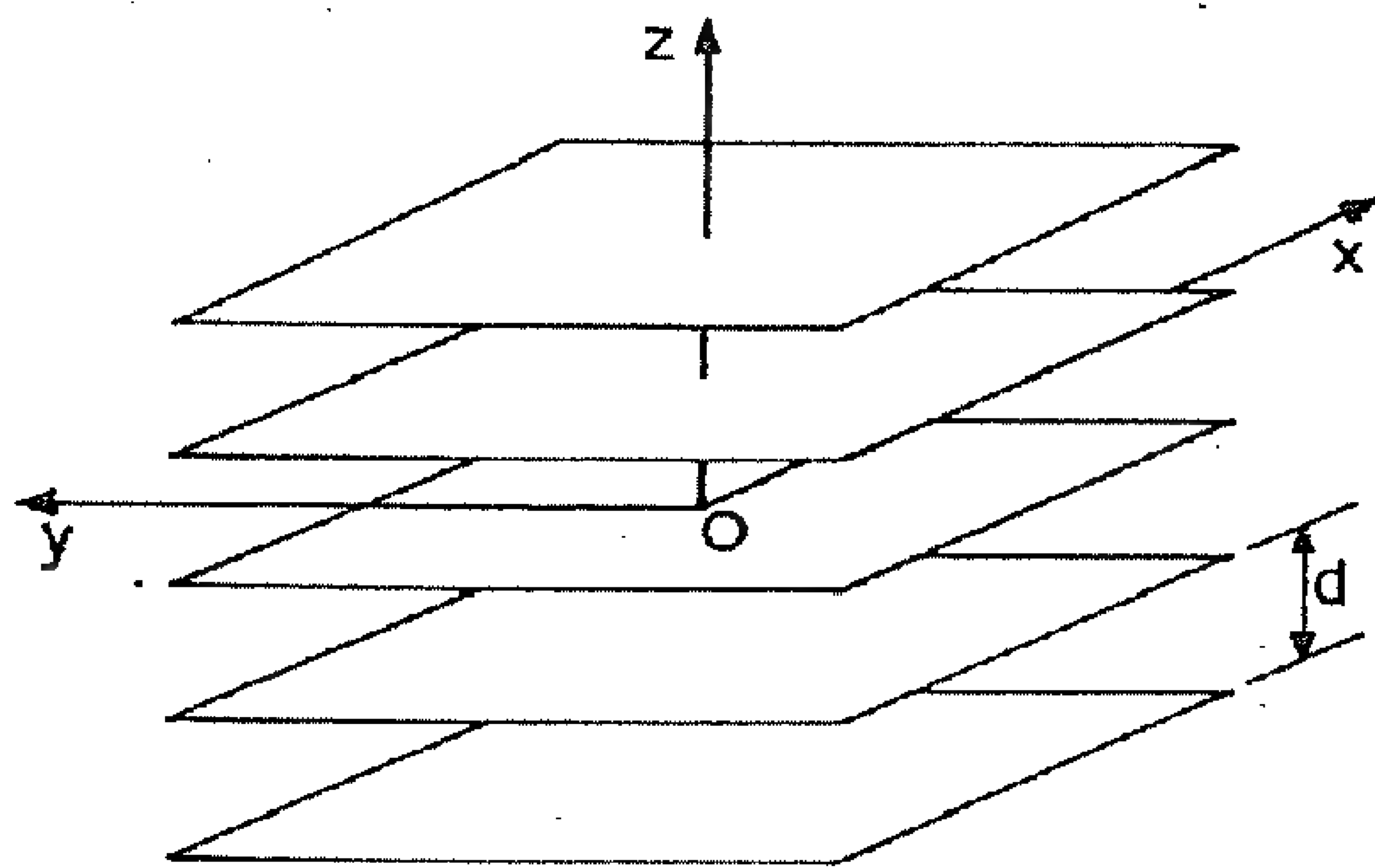
$$\left. \begin{aligned} H_x &= \frac{\pi A}{j \omega \mu b} \cos \frac{\pi z}{b} e^{j(\omega t - \beta x)} \\ H_y &= 0 \\ H_z &= \frac{A}{\omega \mu} \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - \frac{\pi^2}{b^2}} \sin \frac{\pi z}{b} e^{j(\omega t - \beta x)} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

γ. Από την (10) έχουμε :

$$\beta^2 \equiv \beta_{01}^2 = \omega^2 \epsilon \mu - \frac{\pi^2}{b^2} \quad (12)$$



5.3 Έστω μία σειρά από αγωγίμα επίπεδα παράλληλα προς τό επίπεδο xy , πού απέχουν τό ένα από τό άλλο απόσταση d . (βλ. σχ. 1). Νά αποδείξετε ότλ ένα TEM κύμα, πού διαδίδεται κατά τόν άξονα x



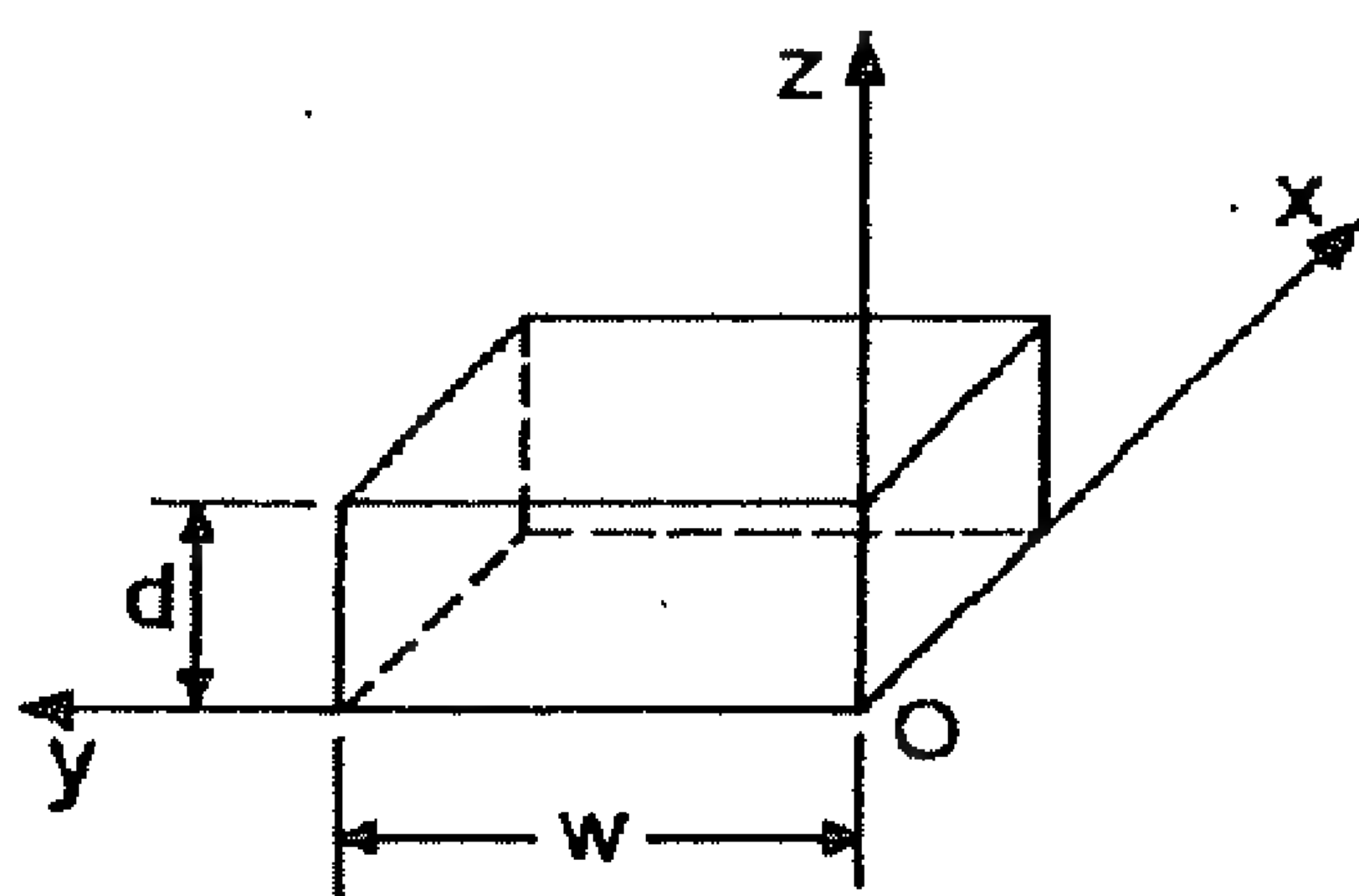
Σχ. 1

καί φτάνει στά επίπεδα, περνά έλεύθερα μέσα τους άν τό ηλεκτρικό του πεδίο είναι κάθετο στά επίπεδα. "Αν, όμως, τό ηλεκτρικό πεδίο του κύματος είναι παράλληλο μέ τά επίπεδα, τότε γιά νά περάσει πρέπει νά είναι $d > \lambda/2$.

(Υπόδειξη : "Ανά δύο τά επίπεδα νά θεωρηθοϋν σάν όριακή περίπτωση όρθογώνιου κυματοδηγοϋ, πού ή μία έγκάρσια διάστασή του (w) τείνει στό άπειρο).

Λύση

α. "Αν $w \rightarrow \infty$ ό κυματοδηγός του σχ. 2 τείνει σέ δύο παράλληλα επίπεδα μέ άπειρο πλάτος. Ένα επίπεδο TEM κύ-



Σχ. 2

μα μέ ηλεκτρικό πεδίο παράλληλο μέ τή διάσταση d περνά έλεύθερα γιατί ικανοποιεί τίσ όριακές συνθήκες :

Έφαπτομ. συνιστώσα του $\vec{E}=0$ (1)
Κάθετη συνιστώσα του $\vec{H}=0$

στήν επιφάνεια καθενός από τά δύο όριζόντια επίπεδα.

"Ας εξετάσουμε τώρα τούς κυματικούς τύπου TE_{mn} , πού μπορεϊ νά κυματοδηγήσει ό κυματοδηγός όταν $w \rightarrow \infty$ (στήν πράξη όταν $w \gg d$). Στή γενική περίπτωση μέ w καί d πεπερασμένα, οί συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου του

τύπου TE_{mn} είναι (βλ. σχέσεις (5-69)) :

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= \frac{j\omega\mu k_z}{k_c^2} H_0 \cos k_y y \sin k_z z e^{j(\omega t - \beta_{mn} x)} \\ E_z &= -\frac{j\omega\mu k_y}{k_c^2} H_0 \sin k_y y \cos k_z z e^{j(\omega t - \beta_{mn} x)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\text{όπου} \quad k_c^2 = k_y^2 + k_z^2 = \frac{m^2 \pi^2}{w^2} + \frac{n^2 \pi^2}{d^2} \quad \text{και} \quad \beta_{mn}^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - k_c^2 \quad (3)$$

Όταν $w \rightarrow \infty$ (στην πράξη όταν $w \gg d$) τότε $k_y \rightarrow 0$ (στην πράξη $k_y \ll k_z$) και τότε

$$k_c = k_z = \frac{n\pi}{d} \quad (4)$$

όπου n θετικός ακέραιος αριθμός. Τότε οι (2) γίνονται :

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= \frac{j\omega\mu d}{n\pi} H_0 \sin\left(\frac{n\pi}{d} z\right) e^{j(\omega t - \beta x)} \\ E_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Άρα, μπορούν να διαδοθούν οι κυματικοί τύποι TE_{mn} , που έχουν μόνο την $E_y \neq 0$, που έχουν δηλ. τό ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} πολωμένο παράλληλα με τα επίπεδα. Σύμφωνα με τα γνωστά μας, διάδοση μπορεί να γίνει μόνο όταν :

$$\lambda < \lambda_{op} \equiv \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2\pi d}{n\pi} = \frac{2d}{n} \quad (6)$$

$$\text{ένω όταν} \quad \lambda > \frac{2d}{n} \quad (7)$$

δεν επιτρέπεται διάδοση.

Επειδή $n = 1, 2, 3, \dots$ ή (6), αν ικανοποιείται με $n = 1$, ικανοποιείται και με κάθε άλλο n .

Επομένως αρκεί :

$$\lambda < 2d$$

$$\text{ή} \quad d > \frac{\lambda}{2} \quad (8)$$

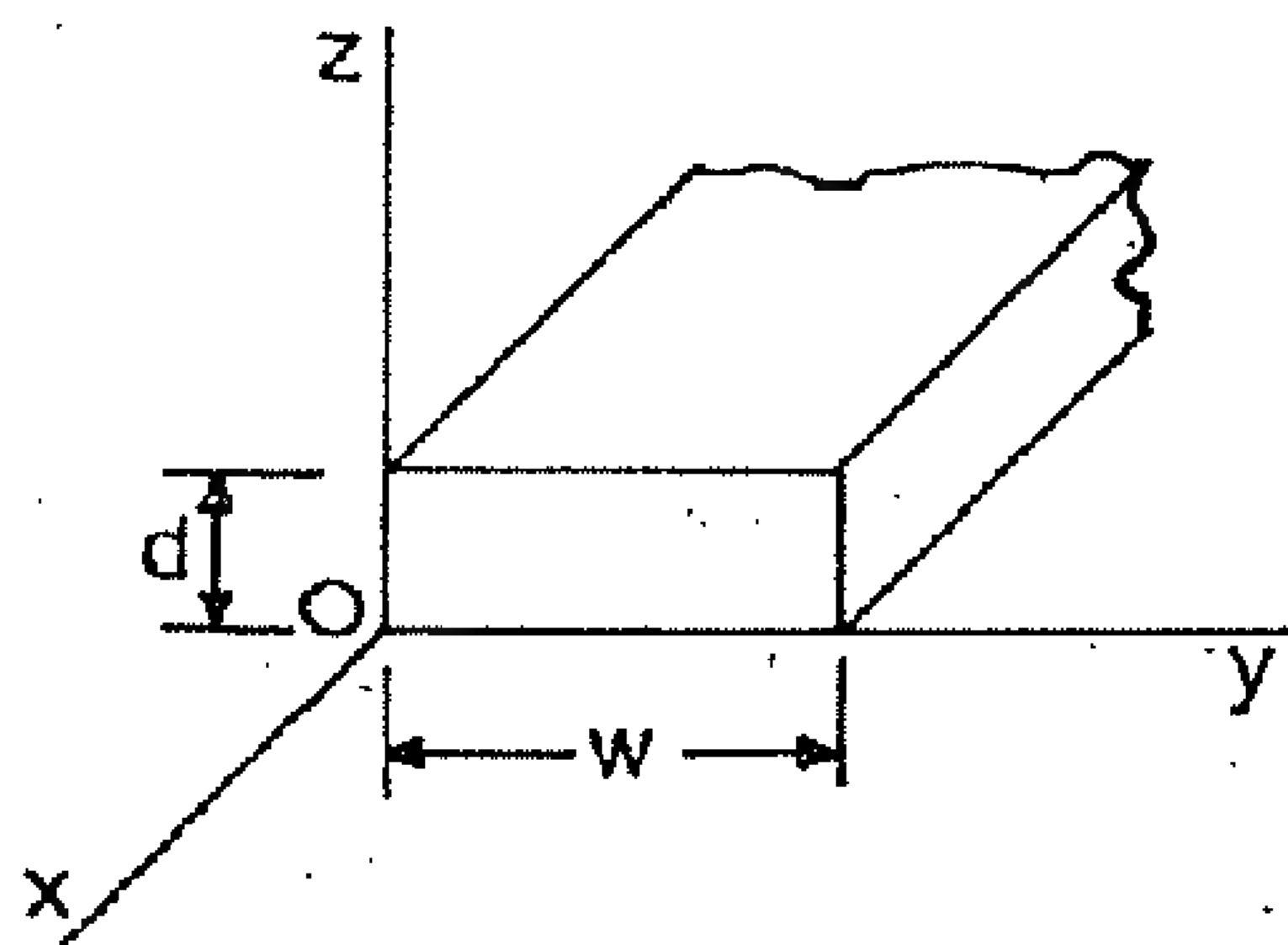
για να υπάρχει διάδοση.

Ωστε, αν προσπέσει ένα επίπεδο TEM κύμα στη μία πλευρά της σειράς των επιπέδων, με πόλωση παράλληλη με αυτά, μπορεί να περάσει μέσα τους σαν κυματικός τύπος TE_{mn} , αν ισχύει η (8). Αν όχι, δεν θα μεταδοθεί καθόλου.

Π α ρ α τ ή ρ η σ η :

Στή γενική περίπτωση, που τό \vec{E} του κύματος σχηματίζει τυχαία γωνία με τα επίπεδα, τότε μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, μία κάθετη και μία παράλληλη με αυτά. Αν τότε ισχύει και $d < \lambda/2$ τό σύστημα συμπεριφέρεται σαν πολωτής με χαρακτηριστικό επίπεδο τό επίπεδο xz .

5.4 Ένας ορθογώνιος κυματοδηγός έχει εσωτερικές εγκάρσιες διαστάσεις w και d ($w > d$ βλ. σχ. 1) και κυματοδηγεί τον κυματικό τύπο TE_{10} σε συχνότητα f .



Σχ. 1

Τό διηλεκτρικό του κυματοδηγοῦ είναι αέρας (ϵ_0, μ_0). Στήν αρχή των αξόνων και για τή χρονική στιγμή $t = 0$ ή μαγνητική συνιστώσα H_x έχει τιμή H_0 .

α. Να προσδιορίσετε τή συνεχή συνιστώσα του διανύσματος Poynting (\vec{P}) στο εσωτερικό του κυματοδηγοῦ.

β. Να δώσετε τή γραφική παράσταση $\bar{P} = f(y)$, όπου $\bar{P} = |\vec{P}|$, καθώς και τή γραφική παράσταση $\bar{P} = f(z)$.

γ. Νά υπολογίσετε τήν ὅλική ἰσχύ N , πού κυματοδηγεῖται (ὑποθέτουμε ὅτι δέν υπάρχουν ἀπώλειες).

δ. Πόση εἶναι ἡ \bar{N} στήν περίπτωση πού $w = 2\text{cm}$, $d = 1\text{cm}$, $f = 10\text{GHz}$, $H_0 = 5\text{A/m}$;

Λύση

α. Οἱ συνιστώσες τῶν πεδίων τοῦ τύπου TE_{10} (βλ. σχέσεις (5-66) εἶναι:

$$H_x = H_0 \cos \frac{\pi y}{w} e^{j(\omega t - \beta_{10} x)} \quad (1)$$

$$H_y = \frac{j\beta_{10} w}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi y}{w} e^{j(\omega t - \beta_{10} x)} \quad (2)$$

$$H_z = 0, \quad E_x = 0, \quad E_y = 0 \quad (3)$$

$$E_z = \frac{-j\omega\mu_0 w}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi y}{w} e^{j(\omega t - \beta_{10} x)} \quad (4)$$

$$\text{ὅπου} \quad \beta_{10}^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \frac{\pi^2}{w^2} = \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 - \frac{\pi^2}{w^2} = \pi^2 \left(\frac{4f^2}{c^2} - \frac{1}{w^2}\right) \quad (5)$$

$$\text{Ἔχουμε τότε} \quad \bar{P} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2} \text{Re} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & E_z \\ H_x^* & H_y^* & 0 \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$\text{ἢ} \quad \bar{P} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[-E_z H_y^* \hat{x} + E_z H_x^* \hat{y} \right] \quad (7)$$

Ὥστε:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[-\frac{j\omega\mu_0 w}{\pi} \frac{j\beta_{10} w H_0^2}{\pi} \sin^2 \frac{\pi y}{w} \hat{x} - \frac{j\omega\mu_0 w}{\pi} H_0^2 \sin \frac{\pi y}{w} \cos \frac{\pi y}{w} \hat{y} \right]$$

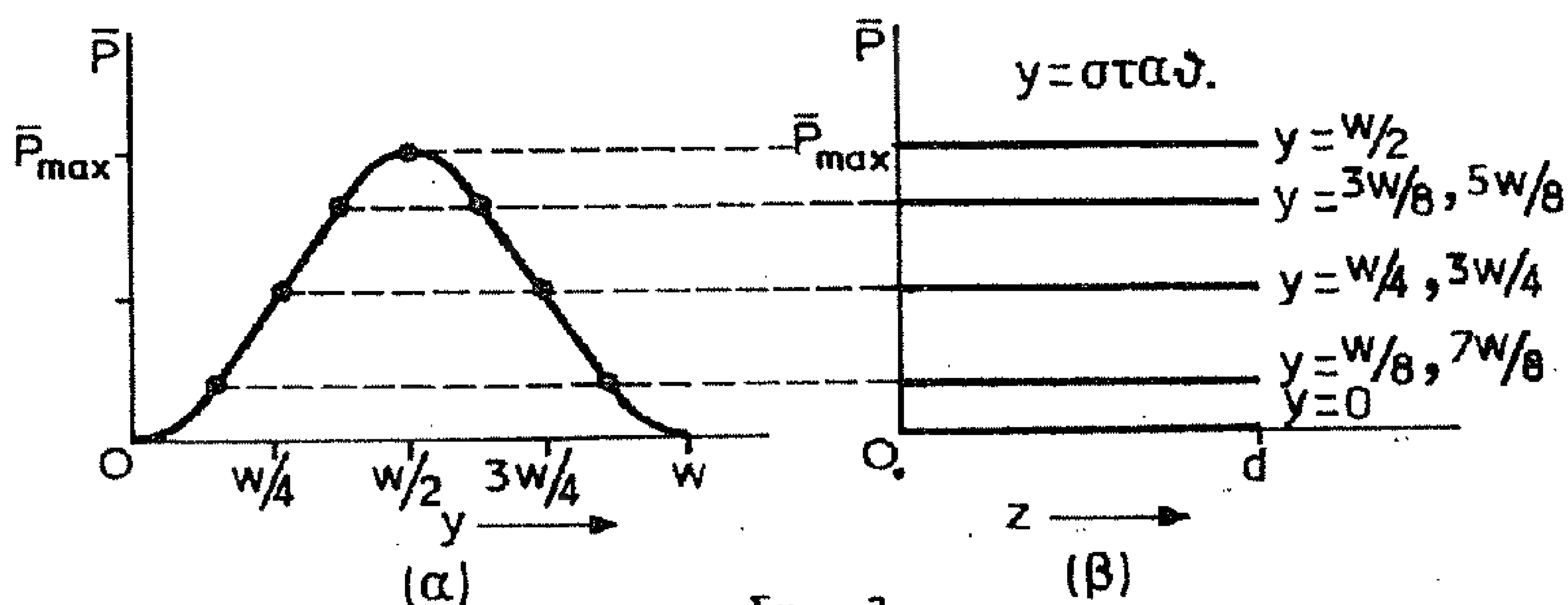
$$\bar{P} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{\mu_0 \omega w^2 H_0^2 \beta_{10}}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi y}{w} \hat{x} - j \frac{\mu_0 \omega w}{\pi} H_0^2 \sin \frac{\pi y}{w} \cos \frac{\pi y}{w} \hat{y} \right]$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \omega w^2 \beta_{10}}{\pi^2} H_0^2 \sin^2 \frac{\pi y}{w} \hat{x} = \frac{2\pi f \mu_0 w^2 H_0^2}{2\pi^2} \sin^2 \frac{\pi y}{w} \pi \sqrt{\frac{4f^2}{c^2} - \frac{1}{w^2}} \hat{x}$$

$$\bar{P} = \mu_0 w^2 H_0^2 \sin^2 \frac{\pi y}{w} f \sqrt{\frac{4f^2}{c^2} - \frac{1}{w^2}} \hat{x} \quad (8)$$

$$\bar{P} = \mu_0 w H_0^2 \sin^2 \frac{\pi y}{w} f \sqrt{\frac{4f^2 w^2}{c^2} - 1} \hat{x} \quad (9)$$

β.Οι γραφικές παραστάσεις δύνονται στο σχήμα 2(α,β)



Σχ. 2

όπου:

$$\bar{P}_{\max} = \mu_0 w H_0^2 f \sqrt{\frac{4f^2 w^2}{c^2} - 1} \quad (10)$$

γ.Είναι:

$$\bar{N} = \int \bar{P} \cdot \hat{x} \, dS \quad (11)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται σ' όλη την εγκάρσια διατομή .

Από τις (9), (10) και (11) προκύπτει :

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \bar{P}_{\max} \int_0^d dz \int_0^w \sin^2 \frac{\pi y}{w} dy = \frac{w \bar{P}_{\max} d}{\pi} \int_0^w \sin^2 \frac{\pi y}{w} d\left(\frac{\pi y}{w}\right) = \\ &= \frac{w \bar{P}_{\max} d}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta = wd \bar{P}_{\max} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta \right] = \frac{wd \bar{P}_{\max}}{2} \\ \bar{N} &= \frac{1}{2} \mu_0 w^2 d H_0^2 f \sqrt{\frac{4f^2 w^2}{c^2} - 1} \end{aligned} \quad (12)$$

δ. 'Αντικαθιστώντας τις τιμές των μεγεθών στη (12) βρίσκουμε :

$$\bar{N} = 0,55 \text{ W} .$$

5.5 "Αν ω είναι η κυκλική συχνότητα ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος μέσα σ' έναν κυματοδηγό, πού είναι γεμάτος με τέλειο διηλεκτρικό, β η σταθερά φάσης του μέσα στον κυματοδηγό και u η ταχύτητα του κύματος στο ελεύθερο διηλεκτρικό.

α. Νά δώσετε τη σχέση $\omega = \omega(\beta)$ (έξισωση διασποράς)

β. Νά δώσετε, ποιοτικά, τη γραφική παράσταση της προηγούμενης σχέσης προσδιορίζοντας και τις τιμές των ω για $\beta=0$ και β πολύ μεγάλο.

γ. Νά υποδείξετε πώς, από το διάγραμμα αυτό, μπορούμε να προσδιορίσουμε, γραφικά, την ταχύτητα φάσης u_p και την ταχύτητα ομάδας u_g .

Λύση

α. 'Από τη θεωρία ξέρουμε ότι η σχέση του β^2 με το ω είναι :

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{u^2} - k_c^2 \quad (1)$$

όπου k_c^2 γεωμετρικός παράγοντας, πού εξαρτάται από το είδος του κυματοδηγού. π.χ. στον ορθογώνιο κυματοδηγό είναι :

$$k_c^2 = k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{m\pi}{w}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 \quad (2)$$

Λύνοντας την (1) για το ω έχουμε :

$$\boxed{\omega = \sqrt{u^2 \beta^2 + u^2 k_c^2}} \quad (3)$$

β. Στο σχήμα φαίνεται η ζητούμενη γραφική παράσταση.

Για $\beta = 0$ έχουμε:

$$\omega = \omega_{op} = v k_c$$

$$\boxed{\omega_{op} = v k_c} \quad (4)$$

ένω για $\beta \gg k_c$ ή (3) γίνεται:

$$\boxed{\omega = v \beta} \quad (5)$$

Η (5) είναι η εξίσωση της ασύμπτωτης ευθείας που ισχύει για το ελεύθερο διηλεκτρικό αφού τότε είναι :

$$\beta = \frac{\omega}{v} \quad (6)$$

Από την (4) έχουμε τη γνωστή μας σχέση:

$$\lambda_{op} = \frac{2\pi}{k_c} \quad (7)$$

γ. Επειδή

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (8)$$

από το διάγραμμα, για το συγκεκριμένο ω , βρίσκουμε το αντίστοιχο β και υπολογίζουμε το πηλίκό τους.

Εξάλλου η ταχύτητα ομάδας v_g είναι :

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (9)$$

είναι δηλ. ὅση μέ την κλίση της καμπύλης διασποράς στο αντίστοιχο ω .

5.6 α. Πόση είναι η διάμετρος ενός κυκλικού κυλινδρικού κυματοδηγού γεμάτου με αέρα (ϵ_0, μ_0) αν η όριμη συχνότητά του στον κυματικό τύπο TE_{11} είναι $9,2 \text{ GHz}$;

β. Σε ποιά συχνότητα θα αρχίσει να εμφανίζεται διάδοση του κυματικού τύπου TM_{01} μέσα στον κυματοδηγό;

Λύση

α. Αν $2a$ η διάμετρος του κυματοδηγού είναι:

$$\lambda_{\text{ορTE}_{11}} = \frac{2\pi\alpha}{P'_{11}} \quad (1)$$

όπου P'_{11} ή πρώτη ρίζα της $J'_1(u)$, που από το σχετικό πίνακα ριζών βρίσκεται ότι είναι:

$$P'_{11} = 1,8412 \quad (2)$$

$$f_{\text{ορTE}_{11}} = \frac{c}{\lambda_{\text{ορTE}_{11}}} = \frac{cP'_{11}}{2\pi\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{cP'_{11}}{2\pi f_{\text{ορTE}_{11}}}$$

$$\text{και } \alpha = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 1,8412}{2\pi \cdot 9,2 \cdot 10^9} \text{ m} = 0,0095 \text{ m} = 0,95 \text{ cm}$$

$$\alpha = 0,95 \text{ cm}$$

β. Το όρικό μήκος κύματος του τύπου TM_{01} είναι:

$$\lambda_{\text{ορTM}_{01}} = \frac{2\pi\alpha}{P_{01}} \quad (3)$$

όπου P_{01} ή πρώτη ρίζα της $J_0(u)$, που είναι

$$P_{01} = 2,4048 \quad (4)$$

οπότε:

$$f_{\text{ορTM}_{01}} = \frac{c}{\lambda_{\text{ορTM}_{01}}} = \frac{cP_{01}}{2\pi\alpha} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 2,4048}{2\pi \cdot 0,95 \cdot 10^{-2}} \text{ Hz} = 12,1 \cdot 10^9 \text{ Hz}$$

$$\underline{f_{\text{ορTM}_{01}} = 12,1 \text{ GHz}}$$

5.7 Νά αποδείξετε ότι, για όλους τους κυματικούς τύπους TM_{n1} ενός κυκλικού κυματοδηγού, την ελάχιστη εξασθένιση λόγω άτελου αγωγιμότητας έχουμε στη συχνότητα:

$$f_m = \sqrt{3} f_{\text{ορ}}$$

και νά προσδιορίσετε την εξάρτηση του συντελεστή εξασθένισης (λόγω άτελου αγωγιμότητας) στη συχνότητα αυτή από την τιμή της $f_{\text{ορ}}$.

Λύση

Ο συντελεστής εξασθένισης λόγω άτελου αγωγιμότητας των τοιχωμάτων του κυκλικού κυματοδηγού είναι:

$$\alpha_{TMnl} = \frac{R_s}{\alpha Z_d \sqrt{1 - \left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}} \quad (1)$$

όπου R_s η επιδερμική αντίσταση του άγωγοῦ:

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}} \quad (2)$$

καί σ_c , μ_c η ειδική αγωγιμότητα καί η μαγνητική διαπερατότητα του άγωγοῦ. Ὡστε:

$$\alpha_{TMnl} = \frac{1}{\alpha Z_d} \sqrt{\frac{\pi \mu_c}{\sigma_c}} \sqrt{\frac{f^3}{f^2 - f_{op}^2}} \quad (3)$$

Εἶναι φανερό (μπορεῖ ν' αποδειχτεῖ μέ παραγωγή της (3)) ὅτι ὁ α , ὅσο ἡ f μεγαλώνει ἀπό τήν τιμή f_{op} καί πάνω, ὡς τό ἄπειρο, ἐμφανίζει ἐλάχιστο σέ κάποια συχνότητα f_m . Τήν τιμή αὕτη της f_m τή βρίσκουμε μηδενίζοντας τήν πρώτη παράγωγο της (3). Δηλαδή:

$$\left. \frac{\partial \alpha_{TMnl}}{\partial f} \right|_{f=f_m} = \frac{1}{\alpha Z_d} \sqrt{\frac{\pi \mu_c}{\sigma_c}} \left. \frac{\frac{(f^2 - f_{op}^2) 3f^2 - 2f^3 f}{(f^2 - f_{op}^2)^2}}{2 \sqrt{\frac{f^3}{f^2 - f_{op}^2}}} \right|_{f=f_m} = 0 \quad (4)$$

$$\eta \quad 3(f_m^2 - f_{op}^2) = 2f_m^2 \quad (5)$$

$$\eta \text{ ἄκόμα} \quad f_m^2 = 3f_{op}^2$$

$$\eta \text{ τελικά} \quad \boxed{f_m = \sqrt{3} f_{op}} \quad (6)$$

Ἀντικαθιστοῦμε στήν (3) καί ἔχουμε:

$$(\alpha_{TMnl})_{min} = \frac{1}{\alpha Z_d} \sqrt{\frac{\pi \mu_c}{\sigma_c}} \sqrt{\frac{3\sqrt{3} f_{op}^3}{3f_{op}^2 - f_{op}^2}} =$$

ή

$$(\alpha_{TM_{nl}})_{\min} = \frac{1}{\alpha Z_d} \sqrt{\frac{3\sqrt{2} \pi \mu_c}{2\sigma_c}} \sqrt{f_{op}} \quad (7)$$

καί άφοϋ

$$Z_d = \sqrt{\frac{\mu_d}{\epsilon_d}} \quad (8)$$

$$(\alpha_{TM_{nl}})_{\min} = \sqrt{\frac{3\sqrt{2} \pi \mu_c \epsilon_d}{2\alpha^2 \sigma_c \mu_d}} \sqrt{f_{op}} \quad (9)$$

5.6 Νά υπολογίσετε τήν ίσχύ, πού κυματοδηγεΐται άπό έναν κυκλικό κυλινδρικό κυματοδηγό πού εΐναι δϋέγερμένος στόν τύπο TE_{01} , άν στην άρχή τών άξόνων ($\rho=0$, $z=0$) τό πλάτος τής μαγνητικής z -συνιστώσας εΐναι H_0 . Ή άκτίνα τοϋ κυματοδηγοϋ εΐναι a καί εΐναι κενός.

Λύση

Ή μαγνητική z -συνιστώσα τοϋ κυματικοϋ τύπου TE_{01} , όπως ξέρουμε άπό τή θεωρία (βλ. σχέσεις τοϋ πύνακα 5-1) εΐναι :

$$H_z = H_0 J_0(k_c \rho) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (1)$$

Οί υπόλοιπες συνιστώσες εΐναι :

$$E_\rho = 0 \quad (2)$$

$$E_\varphi = j Z_0 \frac{\lambda_{op}}{\lambda} H_0 J_0'(k_c \rho) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (3)$$

$$H_\varphi = 0 \quad (4)$$

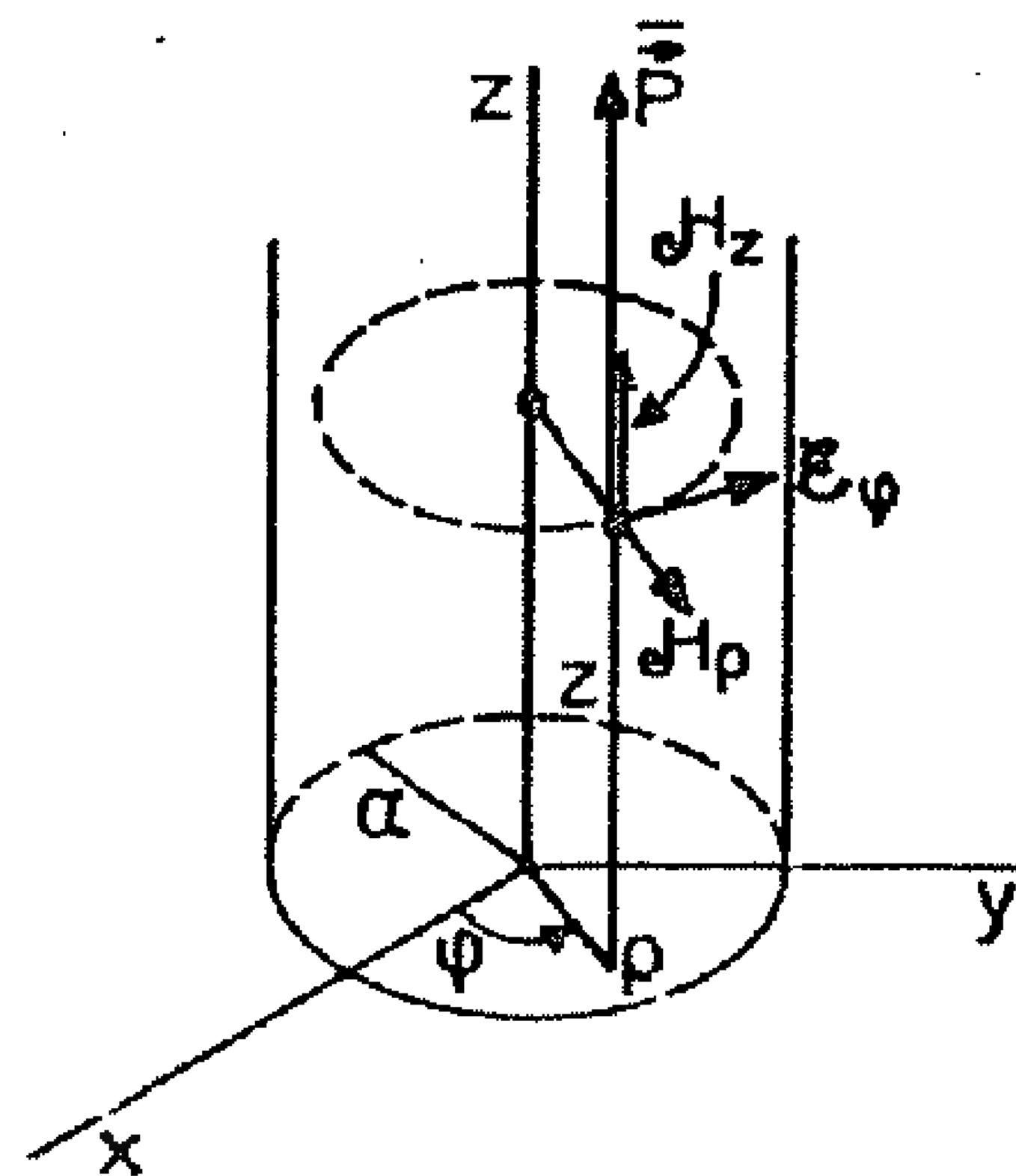
$$H_\rho = -j \frac{Z_0}{Z_{TE}} \frac{\lambda_{op}}{\lambda} H_0 J_0'(k_c \rho) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (5)$$

$$E_z = 0 \quad (6)$$

Στό σχήμα εΐναι σχεδιασμένες οί μή μηδενικές προβολές.

Ή συνεχής συνιστώσα τοϋ διανύσματος Poynting εΐναι :

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{E} \times \bar{H}^*) \quad (7)$$



$$\bar{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[-E_{\varphi} H_{\rho}^* \hat{z} + E_z H_{\varphi}^* \hat{\rho} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[-j Z_0 \frac{\lambda_{op}}{\lambda} H_0 J_0'(k_c \rho) j \frac{Z_0}{Z_{TE}} \cdot \right. \\ \left. - \frac{\lambda_{op}}{\lambda} H_0 J_0'(k_c \rho) \hat{z} + j Z_0 \frac{\lambda_{op}}{\lambda} H_0 J_0'(k_c \rho) H_0 J_0(k_c \rho) \hat{\rho} \right] \quad (8)$$

$$\bar{P} = \frac{Z_0^2 H_0^2 J_0'^2(k_c \rho)}{2 Z_{TE}} \left(\frac{\lambda_{op}}{\lambda} \right)^2 \hat{z} \quad (9)$$

Τό μέτρο \bar{P} τοῦ \bar{P} ἐκφράζει τήν ἰσχύ ἀνά μονάδα διατομῆς.
Ὡστε, ἂν S ἡ διατομή, ἡ ὅλκκη ἰσχύς πού κυματοδηγεῖται εἶναι :

$$\bar{N} = \int_S \bar{P} \cdot \hat{z} \, dS = \int_S \bar{P} \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^a \bar{P} \rho \, d\rho \, d\varphi \quad (10)$$

$$\text{καί ἐπειδὴ εἶναι:} \quad \bar{P} = \bar{P}(\rho) \quad (11)$$

$$\text{ἔχουμε} \quad \bar{N} = 2\pi \int_0^a \bar{P} \rho \, d\rho \quad (12)$$

$$\bar{N} = \frac{\pi Z_0^2 H_0^2}{Z_{TE}} \left(\frac{\lambda_{op}}{\lambda} \right)^2 \int_0^a J_0'^2(k_c \rho) \rho \, d\rho \quad (13)$$

$$\bar{N} = \frac{\pi Z_0^2 H_0^2}{k_c^2 Z_{TE}} \left(\frac{\lambda_{op}}{\lambda} \right)^2 \int_0^{k_c a} J_0'^2(u) u \, du \quad (14)$$

$$\text{ὅπου:} \quad Z_0 = 377 \Omega = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (15)$$

$$k_c = (k_c)_{01} = \frac{P_{01}'}{a} \quad (16)$$

ὅπου P_{01}' εἶναι ἡ 1 τάξης ρίζα τῆς $J_0'(u)$

$$f_{op} = \frac{c P_{01}'}{2\pi a} \quad (17)$$

$$\text{καί} \quad Z_{TE} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{op}} \right)^2}} \quad (18)$$

Π α ρ α τ ῆ ρ η σ η : Στόν ὑπολογισμό τῆς (14) μπορούμε νά χρη-
σιμοποιήσουμε τή σχέση: $J_0'(u) = -J_1(u)$ (19)

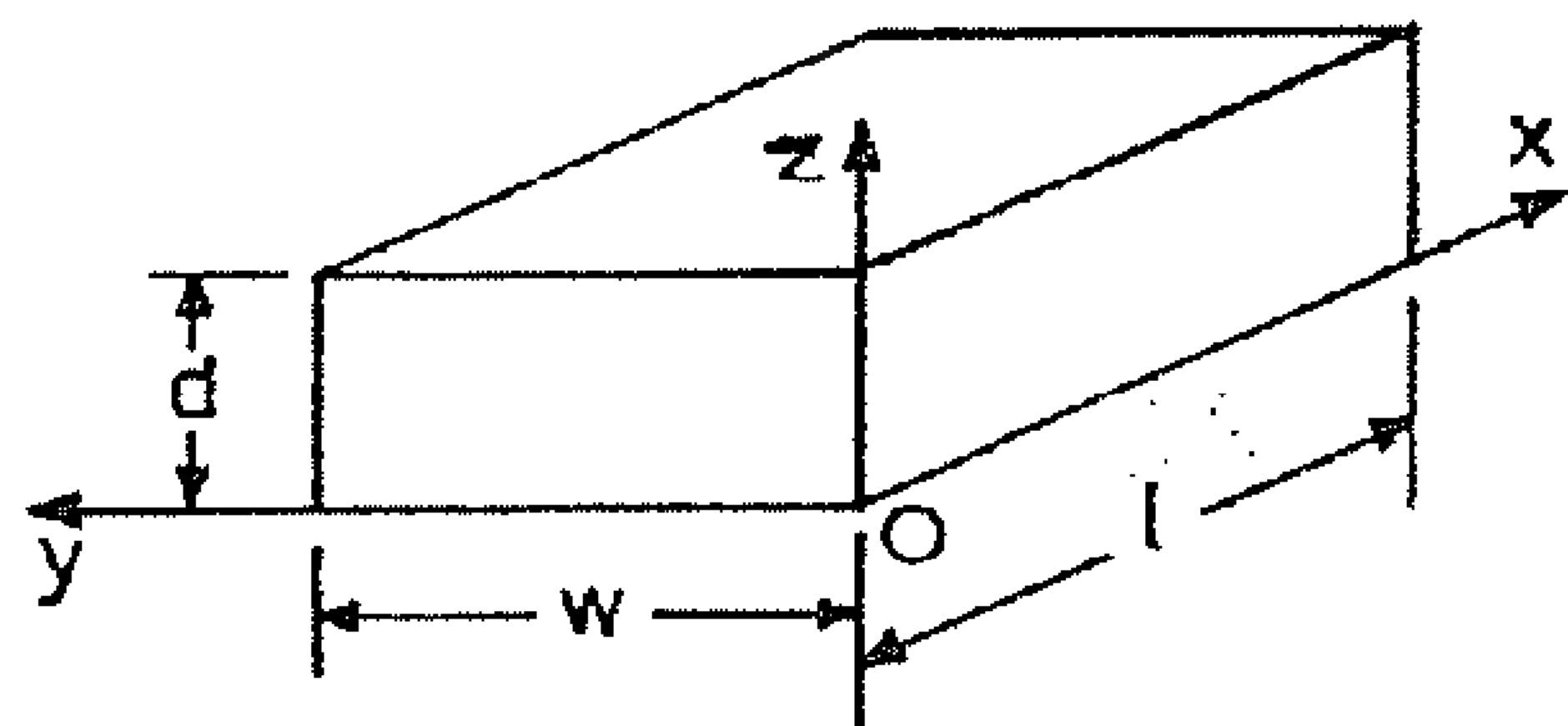
$$\text{καί τόν ἀναγωγικό τύπο:} \quad \int J_n^2(u) u \, du = \frac{u^2}{2} [J_n^2(u) - J_{n-1}(u) J_{n+1}(u)]$$

5.9 Μελέτη του ὀρθογώνιου ἡλεκτρομαγνητικοῦ ἀντηχεύου σέ κυμα-
τικό τύπο TE_{101} .

Ἐστω ὅτι τὸ ὀρθογώνιο ἡλεκτρομαγνητικό ἀντηχεῖο τοῦ σχή-
ματος πάλλεται στὸν κυματικό τύπο TE_{101} . Ἐὰν τὸ διηλεκτρικό τοῦ
ἀντηχεύου εἶναι ἀέρας

α. Νά προσδιοριστεῖ ἡ συχνό-
τητα συντονισμοῦ f_{101} τοῦ
ἀντηχεύου.

β. Ἐὰν $w=2\text{cm}$ καὶ $d=1\text{cm}$ πόσο
πρέπει νά εἶναι τὸ l γιὰ
νά συντονίσει τὸ ἀντηχεῖο στὰ 10 GHz ;



γ. Νά προσδιοριστεῖ ἡ στιγμιαία ἡλεκτρικὴ ἐνέργεια W_e , πού
εἶναι ἀποθηκευμένη μέσα στὸ ἀντηχεῖο, καθὼς καὶ ἡ στιγμι-
αία μαγνητικὴ ἐνέργεια W_m .

δ. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι, ἂν ἀγνοηθοῦν οἱ ἀπώλειες στὰ τοιχώματα,
ἡ ὅλική ἀποθηκευμένη ἡλεκτρομαγνητικὴ ἐνέργεια μέσα
στὸ ἀντηχεῖο εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὸ χρόνο.

ε. Ἐὰν, μέ μιὰ γραμμὴ μεταφορᾶς, τροφοδοτεῖται τὸ ἀντηχεῖο μέ
ἰσχύ τόση, ὥστε ἀκριβῶς καταναλώνεται στὰ τοιχώματά του, νά
ὑπολογιστεῖ ἡ ἰσχύς, πού χάνεται σέ κάθε ἓνα ζευγάρι πα-
ράλληλων τοιχωμάτων του.

στ. Νά προσδιοριστεῖ ὁ συντελεστής ποιότητος Q τοῦ ἀντηχεύου,
πού ὀρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση :

$$Q = 2\pi \frac{\text{ὅλική ἀποθηκευμένη ἐνέργεια}}{\text{ἐνέργεια πού χάνεται σέ μιὰ περίοδο}} = 2\pi \frac{W}{W_T}.$$

ζ. Νά προσδιοριστεῖ τὸ Q στὴν περίπτωση πού $w=l$ (τετράγωνο
ἀντηχεῖο) καὶ νά ὑπολογιστεῖ τὸ Q τοῦ ἀντηχεύου τοῦ ἐρω-
τήματος β, ἂν τὸ ἀντηχεῖο εἶναι χάλκινο καὶ τὸ βάθος δι-

είσδυσης στο χαλκό είναι :

$$x_0 = \frac{6,6 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{f}} \quad \text{σέ m αν τό f σέ Hz} .$$

η. "Αν τό άντηχείο τοῦ έρωτήματος β τροφοδοτεῖται από γραμμή μεταφορᾶς μέ σταθερή ίσχύ 0,1 W καί βρίσκεται σέ ίσορροπία, νά προσδιοριστεῖ τό πλάτος H_0 τῆς μαγνητικῆς διέγερσης μέσα του (γιά τό χαλκό $\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$) .

Λύση

α. "Από τή σχέση (5-152) τῆς θεωρίας, γιά $m = 1$, $n = 0$ καί $p = 1$, προκύπτει:

$$\frac{\omega^2}{v^2} = \pi^2 \left(\frac{1}{w^2} + \frac{1}{l^2} \right) = \frac{\pi^2}{w^2} \left(1 + \frac{w^2}{l^2} \right) \quad (1)$$

από τή σχέση αὐτή μέ $v = c$ καί $\omega = 2\pi f$ ἔχουμε:

$$f_{101} = \frac{c}{2w} \sqrt{1 + \frac{w^2}{l^2}} \quad (2)$$

β. "Από τή (2) προκύπτει ἡ διτετράγωνη ἐξίσωση:

$$4f_{101}^2 l^4 - c^2 l^2 - w^2 c^2 = 0 \quad (3)$$

πού ἔχει τή θετική πραγματική λύση:

$$l = \sqrt{\frac{c^2 + \sqrt{c^4 + 16f_{101}^2 w^2 c^2}}{8f_{101}^2}} \quad (4)$$

άντικαθιστώντας τίς τιμές βρίσκουμε : $l = 2,08 \text{ cm}$

γ. Οἱ συνιστώσες πεδίου τοῦ τύπου TE_{101} τοῦ ὀρθογώνιου άντηχείου δύνονται από τίς σχέσεις (5-154). "Αν V ὁ ὄγκος τοῦ άντηχείου είναι:

$$W_e = \int_V w_e dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E_z^2 dV \quad (5)$$

καί ἐπειδή, αν $H_0 = H_0$ (δηλ. ἔχει φάση μηδέν) , είναι:

$$E_z = \frac{\omega \mu w H_0}{\pi} \sin \frac{\pi y}{w} \sin \frac{\pi x}{l} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (6)$$

ἔχουμε :

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} (2f_{101} \mu W H_0)^2 \cos^2 \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \int_0^l \int_0^w \int_0^d \sin^2 \frac{\pi y}{w} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx dy dz \quad (7)$$

Μετά τήν ολοκλήρωση έχουμε :

$$W_e = \frac{\mu_0 H_0^2 l w d}{8} \left(1 + \frac{w^2}{l^2} \right) \sin^2 \omega t \quad (8)$$

Ανάλογα έχουμε :

$$W_m = \frac{\mu_0}{2} \int_V H^2 dV \quad (9)$$

$$\text{όπου} \quad H^2 = H_x^2 + H_y^2 \quad (10)$$

$$\text{καί} \quad H_x = H_0 \cos \frac{\pi y}{w} \sin \frac{\pi x}{l} \cos \omega t \quad (11)$$

$$H_y = -\frac{w}{l} H_0 \sin \frac{\pi y}{w} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \omega t \quad (12)$$

Τελικά βρίσκουμε:

$$W_m = \frac{\mu_0 H_0^2 l w d}{8} \left(1 + \frac{w^2}{l^2} \right) \cos^2 \omega t \quad (13)$$

δ. Από τύς (8) καί (13) έχουμε:

$$W = W_e + W_m = \frac{\mu_0 H_0^2 l w d}{8} \left(1 + \frac{w^2}{l^2} \right) \quad (14)$$

Αν αγνοηθοῦν οἱ ἀπώλειες εἶναι $H_0 = \text{σταθ. καί ἑπομένως:}$

$$W = \text{σταθ.}$$

ε. Ἐστω \bar{N}_x ἡ ἰσχύς πού χάνεται στά δύο τοιχώματα πού εἶναι κάθετα στόν ἄξονα x καί ἀντίστοιχα \bar{N}_y καί \bar{N}_z γιά τούς ἄλλους ἄξονες. Στή \bar{N}_x συνεισφέρει μόνο ἡ παράλληλη συνιστώσα H_y (βλ. πρόβλ. 4.5 καί προβλ. 4.4). Ἐάν \bar{P}_x εἶναι ἡ ἰσχύς ἀνά μονάδα ἐπιφάνειας πού χάνεται, ἔχουμε γιά τό τοίχωμα $x = 0$:

$$\bar{P}_x = \frac{1}{2} R_s |H_y|_{x=0}^2 \quad (15)$$

$$\text{Ὡστε} \quad \bar{N}_x = 2 \int_{y=0}^w \int_{z=0}^d \bar{P}_x dy dz = R_s \int_{y=0}^w \int_{z=0}^d |H_y|_{x=0}^2 dy dz \quad (16)$$

$$\text{Ἀλλά εἶναι :} \quad |H_y|_{x=0}^2 = \left(\frac{w}{l} \right)^2 H_0^2 \sin^2 \frac{\pi y}{w} \quad (17)$$

ή τελικά:

$$\bar{N}_x = \frac{1}{2} R_s H_0^2 \left(\frac{w}{l} \right)^2 w d \quad (18)$$

Μέ τον ίδιο τρόπο στην ισχύ \bar{N}_y συνεισφέρει η H_x ενώ στην ισχύ \bar{N}_z συνεισφέρουν και η H_x και η H_y .

Οι αντίστοιχοι υπολογισμοί δίνουν :

$$\bar{N}_y = \frac{1}{2} R_s H_0^2 l d \quad (19)$$

$$\text{και} \quad \bar{N}_z = \frac{1}{4} R_s H_0^2 \left(1 + \frac{w^2}{l^2} \right) w l \quad (20)$$

στ. Η ολική μέση ισχύς \bar{N} που χάνεται στα τοιχώματα είναι:

$$\bar{N} = \bar{N}_x + \bar{N}_y + \bar{N}_z \quad (21)$$

και επομένως:

$$Q = \frac{2\pi f W}{\bar{N}} = \frac{\mu_0 \pi f}{R_s} l w d \frac{1 + \frac{w^2}{l^2}}{2 \left(\frac{w}{l} \right)^2 w d + 2 l d + \left(1 + \frac{w^2}{l^2} \right) w l} \quad (22)$$

ζ. Για $w=l$ η (22) δίνει:

$$Q = \frac{2 \mu_0 \pi f}{R_s} \frac{l w d}{2 (w d + l d + w l)} \quad (23)$$

ή

$$Q = \frac{2 \mu_0 \pi f}{R_s} \frac{V}{S_{ολ}} \quad (24)$$

όπου $V=lwd$ είναι ο όγκος του αντηχείου και $S_{ολ}=2(wd+ld+wl)$ το συνολικό έμβαδό των έσωτερικών του τοιχωμάτων.

Δεδομένου ότι

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} \quad (25)$$

$$\text{και τό βάθος διείσδυσης} \quad x_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (26)$$

ή (24) μπορεί να γραφεί:

$$Q = \frac{2}{x_0} \frac{V}{S_{ολ}} \quad (27)$$

Στήν περίπτωση του έρωτ. β είναι $w = 2d = 2\text{cm}$ και $f=10\text{ GHz}=10^{10}\text{ Hz}$, προσδιορίστηκε δέ $\lambda = 2,08\text{ cm} \approx 2\text{ cm}$.

Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (27) :

$$Q = \frac{2 \cdot 10^5}{6,6 \cdot 10^{-2}} \frac{4 \cdot 10^{-6}}{16 \cdot 10^{-4}} = 7576 \quad (28)$$

"Αν λογαριάσουμε τό Q από την (22) βρίσκουμε την ακριβέστερη τιμή : $Q = 7646$.

η. Από τις (18), (19), (20) και (21) έχουμε:

$$\bar{N} = \frac{1}{4} R_S H_0^2 \left[2 \left(\frac{w}{l} \right)^2 w d + 2 l d + \left(1 + \frac{w^2}{l^2} \right) w l \right] \quad (29)$$

Γιὰ $w \simeq l$ έχουμε:

$$\bar{N} = \frac{1}{4} R_S H_0^2 S_{0\lambda} \quad (30)$$

Είναι όμως :

$$R_S = \frac{1}{\sigma x_0} \quad (31)$$

Ωστε

$$\bar{N} = \frac{1}{4 \sigma x_0} H_0^2 S_{0\lambda} \quad (32)$$

και

$$H_0 = \sqrt{\frac{4 \sigma x_0 \bar{N}}{S_{0\lambda}}} \quad (33)$$

Θέτοντας στην (33) $\bar{N} = 0,1 \text{ W}$, $\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$,

$$S_{0\lambda} = 16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \quad \text{και} \quad x_0 = \frac{6,6 \cdot 10^{-2}}{10^5} \text{ m}$$

Έχουμε τελικά: $\underline{H_0 = 94 \text{ A/m}}$.

5.10 Ένας ορθογώνιος κυματοδηγός έχει εσωτερικές εγκάρσιες διαστάσεις $w = 8 \text{ cm}$ και $d = 4 \text{ cm}$, και περιέχει αέρα.

α. Να προσδιοριστούν οι όρικές συχνότητες των ακόλουθων κυματικών τύπων: TEM , TE_{10} , TE_{20} , TE_{01} , TE_{02} , TE_{11} , TE_{21} , και TE_{12} .

β. Να προσδιοριστεί ο λόγος της ταχύτητας, πού έχει τό κύ-

μα μέσα στον κυματοδηγό, προς την ταχύτητά του στον ελεύθερο αέρα, για κάθε έναν από τους παραπάνω κυματικούς τύπους στη συχνότητα $f = 1,5 f_{op}$.

('Απ. α. 'Ο τύπος TEM δεν διαδίδεται

$$TE_{10} : f_{op} = 1,87 \text{ GHz}$$

$$TE_{20} : 3,75 \text{ GHz}$$

$$TE_{01} : 3,75 \text{ GHz}$$

$$TE_{02} : 7,50 \text{ GHz}$$

$$TE_{11} : 4,19 \text{ GHz}$$

$$TE_{21} : 5,30 \text{ GHz}$$

$$TE_{12} : 7,73 \text{ GHz}$$

β. $\frac{v}{v_k} = 1,342$ για όλους τους τύπους που διαδίδονται).

5.11 Νά υπολογιστούν η ταχύτητα φάσης (v_p) και η ταχύτητα ομάδας (v_g) του κυματικού τύπου H_{10} μέσα σ' έναν ορθογώνιο κυματοδηγό, που έχει εσωτερικές εγκάρσιες διαστάσεις $w = 2,5 \text{ cm}$ και $d = 1,25 \text{ cm}$ και περιέχει αέρα. 'Η συχνότητα του κύματος είναι $f = 10 \text{ GHz}$.

('Απ. $v_p = 3,75 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$, $v_g = 2,4 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$)

5.12 Νά υπολογιστούν οι διαστάσεις w και d ενός ορθογώνιου κυματοδηγού, αν $\frac{w}{2} < d < w$ και ο κυματοδηγός με διηλεκτρικό τόν αέρα, θέλουμε να μεταδίδει τόν κυματικό τύπο TE_{10} σε συχνότητα $f = 3 \text{ GHz}$ και με παράγοντα ασφάλειας 30% (δηλ. $f = 1,3 f_{op}$).

'Επιπλέον, όμως, ο κυματικός τύπος με την άμέσως μεγαλύτερη ορική συχνότητα να βρίσκεται 30% κάτω από αυτήν. (έξετάσεις Δεκεμ. 1978) ('Απ. $w = 6,5 \text{ cm}$, $d = 3,5 \text{ cm}$)

5.13 Ἡ ἐξίσωση διασπορᾶς γιὰ ἓναν ὀρθογώνιο κυματοδηγό καὶ γιὰ ἓναν ἀπὸ τοὺς κυματικούς τύπους TE_{mn} μπορεῖ νὰ γραφεῖ ὡς ἐξῆς :

$$\omega^2 = A \left(\beta^2 + \frac{\pi^2}{w^2} + \frac{\pi^2}{d^2} \right) \quad (1)$$

ὅπου ω ἡ κυκλική συχνότητα τοῦ κύματος, β ἡ σταθερά φάσης του, $\pi=3,14$, w καὶ d οἱ ἐγκάρσιες διαστάσεις τοῦ κυματοδηγοῦ καὶ $A = 9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2/\text{sec}^2$ (εἶναι $w > d$).

α. Νά προσδιοριστοῦν οἱ ἀριθμοὶ m καὶ n τοῦ συγκεκριμένου αὐτοῦ τύπου TE_{mn} , καθὼς καὶ ἡ τιμὴ v τῆς ταχύτητας διάδοσεως, πού θὰ εἶχε τὸ κύμα μέ τὴν ἴδια κυκλική συχνότητα στὸ ἐλεύθερο διηλεκτρικό.

β. Νά προσδιοριστοῦν ἡ σταθερά φάσης β τοῦ παραπάνω κυματικού τύπου καὶ τὸ μῆκος κύματός του λ_k , ἂν ἡ συχνότητά του εἶναι $f = 10\text{GHz}$ καὶ εἶναι $w = 3\text{cm}$, $d = 2\text{cm}$.

γ. Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα ομάδας v_g μέσα στὸν κυματοδηγό;
(θέμα ἐξετάσεων Ὀκτωβρίου 1978)

(Ἀπ. α. $m=n=1$, $v = 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$

β. $\beta = 91 \text{ m}^{-1}$, $\lambda_k = 69 \text{ mm}$

γ. $v_g = 1,3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$)

5.14 Οἱ ἐσωτερικὲς ἐγκάρσιες διαστάσεις ἐνὸς ὀρθογώνιου κυματοδηγοῦ εἶναι $w = 5 \text{ cm}$ καὶ $d = 4 \text{ cm}$ καὶ τὸ διηλεκτρικό τοῦ εἶναι ἀέρας:

α. Σέ συχνότητες κάτω ἀπὸ 8 GHz ποιοὶ κυματικοὶ τύποι TE καὶ TM διαδίδονται;

β. Στὴ συχνότητα $f = 1,7f_{op}$ πόσος εἶναι ὁ λόγος τῆς ταχύτητας τοῦ κύματος μέσα στὸν κυματοδηγό πρὸς τὴν ταχύτητά του στὸν ἐλεύθερο ἀέρα γιὰ κάθε κυματικό τύπο;

('Απ. α. TE_{10} 3,0 GHz , TE_{20} 6,0 GHz , TE_{11} 4,8 GHz

TE_{21} 7,1 GHz , TE_{01} 3,7 GHz , TE_{02} 7,5 GHz

TM_{11} 4,8 GHz , TM_{21} 7,1 GHz

β. $u_x/u = 1,237$ για όλους τους τύπους)

5.15 'Η σχέση πού δίνει τό συντελεστή εξασθένησης α_c , λόγω άτε-
λοῦς άγωγιμότητας, τῶν κυματικῶν τύπων TM_{mn} σ' ἕναν ὀρθογώνιο
κυματοδηγό, εἶναι:

$$(\alpha_c)_{TM_{mn}} = \frac{2R_s}{dz_d \sqrt{1 - \left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}} \frac{\left[m^2 \left(\frac{d}{w}\right)^3 + n^2\right]}{\left[m^2 \left(\frac{d}{w}\right)^2 + n^2\right]} \quad (1)$$

Νά προσδιοριστεῖ ἡ συχνότητα f_m , στήν ὁποία ὁ α_c γίνεται
ελάχιστος. ('Υπενθυμίζεται ὅτι ἡ ἐπιδερμική ἀντίσταση R_s εἶναι
συνάρτηση τῆς συχνότητας βλ. καί προβλ. 5.7)

('Απ. $f_m = \sqrt{3} f_{op}$)

5.16 Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἕνας ὀρθογώνιος κυματοδηγός, πού ἔχει
ἐσωτερικές ἐγκάρσιες διαστάσεις w καί d , ἐντελῶς άγωγιμα τοιχώ-
ματα καί εἶναι διεγερμένος στόν κυματικό τύπο TE_{10} , μεταδύδει
ὀλική μέση ἰσχύ :

$$\bar{N} = \frac{\omega \mu \beta_{10} |H_0|^2 d w^3}{4 \pi^2}$$

5.17 'Η ἐσωτερική διάμετρος ενός κυλινδρικοῦ κυματοδηγοῦ, πού
περιέχει αέρα, εἶναι $2a = 5 \text{ cm}$.

α. Νά προσδιοριστοῦν οἱ ὀρικές συχνότητες τῶν κυματικῶν

τύπων: TM_{01} , TM_{02} , TM_{11} , TM_{12} , TE_{01} , TE_{02} , TE_{11} και TE_{12} .

β. Πόσος είναι ο λόγος της ταχύτητας του κύματος μέσα στο κυματοδηγό προς την ταχύτητά του στον ελεύθερο αέρα, για τους παραπάνω κυματικούς τύπους και στη συχνότητα $f = 1,3 f_{op}$;

(Απ. α. TM_{01} 2,3 GHz, TM_{02} 5,3 GHz, TM_{11} 3,7 GHz

TM_{12} 6,7 GHz, TE_{01} 3,7 GHz, TE_{02} 6,7 GHz

TE_{11} 1,8 GHz, TE_{12} 5,1 GHz

β. $v_x/v = 1,565$ για όλους τους τύπους)

5.18 Ένας κυλινδρικός κυματοδηγός με εσωτερική διάμετρο $2a=7,5$ cm περιέχει αέρα.

α. Σέ συχνότητες κάτω από 5 GHz ποιούς κυματικούς τύπους, TE ή TM μπορεί να μεταδώσει ο κυματοδηγός;

β. Πόσος είναι ο λόγος της ταχύτητας του κύματος μέσα στο κυματοδηγό προς την ταχύτητά του στον ελεύθερο αέρα, στη συχνότητα $f = 1,3 f_{op}$;

(Απ. α. TE_{11} 1,17 GHz, TE_{21} 1,97 GHz, TE_{31} 2,67 GHz

TE_{41} 3,37 GHz, TE_{51} 4,01 GHz, TE_{01} 2,45 GHz

TE_{02} 4,46 GHz, TE_{12} 3,39 GHz, TE_{22} 4,27 GHz

TM_{01} 1,52 GHz, TM_{11} 2,45 GHz, TM_{31} 4,05 GHz

TM_{41} 4,82 GHz, TM_{02} 3,51 GHz, TM_{12} 4,46 GHz

β. $v_x/v = 1,809$ για όλους τους τύπους)

5.19 Νά αποδειχτεί ότι ένας κυλινδρικός κυματοδηγός, που έχει εσωτερική ακτίνα a , έντελως αγωγικά τοιχώματα και είναι διεγερ-

μέγος στον κυματικό τύπο TE_{11} , μεταδύσει όλικη μέση ισχύ:

$$\bar{N} = \frac{\omega \mu \beta_{11} |H_0|^2 a^4}{82}$$

5.20 Νά προσδιορίσετε ποιός κυματικός τύπος ἔχει τή μικρότερη όρική συχνότητα καί πόση εἶναι αὐτή, ἂν ξέρουμε τά γεωμετρικά στοιχεῖα τοῦ κυματοδηγοῦ καί τά ϵ καί μ τοῦ διηλεκτρικοῦ του.

α. Σ' ἓναν ὀρθογώνιο κυματοδηγό μέ ἐγκάρσιες διαστάσεις w καί d ($w > d$) καί

β. Σ' ἓναν κυκλικό κυλινδρικό κυματοδηγό μέ ἀκτίνα a .

(Θέμα ἐξετάσεων 'Ιουλίου 1977) .

('Απ. α. 'Ο τύπος TE_{10} μέ $f_{op} = \frac{1}{2 \sqrt{\epsilon \mu} w}$

β. 'Ο τύπος TE_{11} μέ $f_{op} = \frac{0,293}{a \sqrt{\epsilon \mu}}$)

5.21 α. Νά προσδιορίσετε τή συνάρτηση

$$\lambda_x = \lambda_x(\lambda_0, \lambda_{op}, \epsilon_r, \mu_r)$$

ὅπου λ_x τό μήκος κύματος, πού ἔχει ἓνας ὀρισμένος κυματικός τύπος μέσα σ' ἓναν κυματοδηγό, λ_0 τό μήκος κύματος τῆς ἴδιας συχνότητας στό κενό, χωρίς κυματοδήγηση, λ_{op} τό ὀρικό μήκος κύματος τοῦ κυματοδηγοῦ γιά τόν συγκεκριμένο κυματικό τύπο καί ϵ_r , μ_r ἡ σχετική διηλεκτρική σταθερά καί ἡ σχετική μαγνητική διαπερατότητα τοῦ ὑλικοῦ, πού περιέχει ὁ κυματοδηγός.

β. Ἡ ὀρική συχνότητα γιά ὀρισμένο κυματικό τύπο ἑνός κυματοδηγοῦ, ὅταν αὐτός εἶναι ἄδειος, εἶναι $f_{op} = 8,6$ GHz. Γεμίζουμε τόν κυματοδηγό μέ διηλεκτρικό ὑλικό, πού ἔχει $\epsilon_r = 2,56$ καί $\mu_r = 1$, καί κυματοδηγοῦμε τόν ἴδιο κυματικό

τύπο σέ συχνότητα $f = 6 \text{ GHz}$. Πόσο είναι τό μήκος κύματος λ_{κ} μέσα στόν κυματοδηγό; (Θέμα εξέτάσεων 'Οκτωβ. 1977)

('Απ. α. $\lambda_{\kappa} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0p}}\right)^2}}$
 β. $\lambda_{\kappa} = 0,07 \text{ m}$)

5.22 Ένα ὀρθογώνιο ἡλεκτρομαγνητικό ἀντηχεῖο περιέχει ἀέρα καί ἔχει διαστάσεις $w = l = 8 \text{ cm}$ καί $d = 3,5 \text{ cm}$. Είναι κατασκευασμένο ἀπό χαλκό καί ἐπικρυσωμένο ἐσωτερικά. Ἄν τό ἀντηχεῖο λειτουργεῖ στόν κυματικό τύπο TE_{101} νά προσδιοριστοῦν :

α. Ἡ συχνότητα συντονισμοῦ

β. Τό μήκος κύματος συντονισμοῦ

γ. Ὁ συντελεστής ποιότητος Q .

(Γιά τό χρυσό εἶναι $\sigma = 4,1 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$)

('Απ. α. $f = 2,65 \text{ GHz}$

β. $\lambda = 11,3 \text{ cm}$

γ. $Q = 12413$)

5.23 α. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ὁ συντελεστής ποιότητος Q , ἑνός ὀρθογώνιου ἡλεκτρομαγνητικοῦ ἀντηχεῖου πού ἔχει ἐσωτερικές διαστάσεις w, d, l καί λειτουργεῖ στόν κυματικό τύπο TE_{101} μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τή σχέση:

$$Q = \frac{\pi Z}{4R_s} \left[\frac{2d(w^2 + l^2)^{3/2}}{wl(w^2 + l^2) + 2d(w^3 + l^3)} \right] \quad (1)$$

ὅπου Z ἡ κυματική ἀντίσταση τοῦ διηλεκτρικοῦ τοῦ ἀντηχεῖου καί R_s ἡ ἐπιδερμική ἀντίσταση τῶν τοιχωμάτων του.

β. Νά αποδειχτεί ότι στην περίπτωση κυβικού ηλεκτρομαγνητικού αντηχείου είναι:

$$Q = \frac{\sqrt{2}\pi}{6} \frac{Z}{R_S} = 0,742 \frac{Z}{R_S} \quad (2)$$

δηλ. ο Q είναι ανεξάρτητος από την ακμή του κύβου.

γ. Νά αποδειχτεί ότι για ένα χαλκίνο κυβικό αντηχείο με διηλεκτρικό τόν αέρα, σε συχνότητα $f = 10 \text{ GHz}$, είναι:

$$Q = 10730$$

(για τό χαλκό $R_S = 0,0261 \Omega$, για τόν αέρα $Z \approx Z_0 = 377\Omega$).

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 6

6.1 Μέσα σ' ένα αραιό αέριο πλάσμα υπάρχει εξωτερικό σταθερό μαγνητικό πεδίο \vec{B}_0 παράλληλο προς τόν άξονα z . Νά αποδειχτεί ότι αν μέσα στο πλάσμα διαδίδεται ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα με κυκλική συχνότητα $\omega \gg \frac{e}{m} B_0$ ή συνιστώσα Hall της πυκνότητας ρεύματος (\vec{J}_H), που αναπτύσσεται, είναι κάθετη στο \vec{B}_0 και στο διάνυσμα \vec{E} του ηλεκτρικού πεδίου του κύματος (e , m φορτίο και μάζα του ηλεκτρονίου αντίστοιχα).

Λ ύ σ η

τό μέγεθος $\omega_g = \frac{e}{m} B_0 \quad (1)$

είναι η γυρομαγνητική συχνότητα του πλάσματος.

Όταν $\omega \gg \omega_g$ (όπως συμβαίνει εδώ) ο τανυστής της είδυκτης αγωγιμότητας του πλάσματος έχει τή συνιστώσα:

$$\vec{\sigma}_H = \frac{j\sigma_0 \omega_g}{\omega} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

πού εκφράζει τό φαινόμενο Hall, όπου:

$$\sigma_0 = -j \frac{Ne^2}{\omega m} \quad (3)$$

Ἡ συνιστώσα Hall τῆς πυκνότητας ρεύματος εἶναι:

$$\vec{J}_H = \vec{\mathcal{J}}_H e^{j\omega t} \quad (4)$$

$$\text{μέ } \vec{\mathcal{J}}_H = \vec{\sigma}_H \vec{\mathcal{E}} = j \frac{\sigma_o \omega g}{\omega} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = j \frac{\sigma_o \omega g}{\omega} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_y \\ -\mathcal{E}_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ὡστε ἡ \vec{J}_H δέν ἔχει z-συνιστώσα, εἶναι δηλαδή κάθετη στόν ἄξονα z, ἐπομένως καί στό \vec{B}_0 .

Σχηματίζοντας τό ἐσωτερικό γινόμενο $\vec{\mathcal{J}}_H \cdot \vec{\mathcal{E}}$ ἔχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{J}}_H \cdot \vec{\mathcal{E}} &= [\vec{\mathcal{J}}_H]^T [\vec{\mathcal{E}}] = j \frac{\sigma_o \omega g}{\omega} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_y & -\mathcal{E}_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = \\ &= j \frac{\sigma_o \omega g}{\omega} (\mathcal{E}_y \mathcal{E}_x - \mathcal{E}_x \mathcal{E}_y) = 0 \end{aligned}$$

Ὡστε ἡ \vec{J}_H εἶναι κάθετη καί στό πεδίο \vec{E} τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος.

6.2 Ἐνα ἀραιό ἀέριο πλάσμα ἔχει ἠλεκτρονική πυκνότητα N.

α. Μέ πόση ταχύτητα υ διαδίδεται μέσα σ' αὐτό ἓνα ἐπίπεδο ἠλεκτρομαγνητικό κύμα, μέ κυκλική συχνότητα ω ἀρκετά μεγαλύτερη ἀπό τή χαρακτηριστική κυκλική συχνότητα τοῦ πλάσματος;

β. Στήν περίπτωση ἐνός διαμορφωμένου κύματος ἐνδιαφέρει τόσο ἡ ταχύτητα φάσης ὅσο καί ἡ ταχύτητα ομάδας.

Ἐν τὸ παραπάνω κύμα διαμορφθεῖ, πόση θά εἶναι ἡ ταχύτητα φάσης καί πόση ἡ ταχύτητα ομάδας;

Λύση

α. Ἡ συχνότητα πλάσματος f_p καί ἡ πυκνότητα N σχετίζονται μέ τήν ἐξίσωση (σύστημα SI) :

$$f_p = 9 \sqrt{N} \quad (1)$$

Επομένως $\omega_p = 18\pi \sqrt{N}$ (2)

Η διηλεκτρική σταθερά του πλάσματος (απουσία μαγνητικού πεδίου) είναι:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) = \epsilon_0 \left(1 - \frac{324 \pi^2 N}{\omega^2} \right) \quad (3)$$

Η ταχύτητα v του ΗΜ κύματος είναι:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{324 \pi^2 N}{\omega^2}}} \quad (4)$$

β. Η σταθερά φάσης του κύματος είναι:

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{324 \pi^2 N}{\omega^2}} \quad (5)$$

Η ταχύτητα φάσης v_p είναι:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{324 \pi^2 N}{\omega^2}}} = v \quad (6)$$

Γράφουμε την (5) με τη μορφή :

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{324 \pi^2 N}{c^2} \quad (7)$$

όποτε η ταχύτητα ομάδας v_g προκύπτει με την παραγωγή της (7)

$$2\beta d\beta = \frac{2\omega}{c^2} d\omega \quad \text{από όπου} \quad v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{\beta c^2}{\omega} = \frac{c^2}{v} \quad (8)$$

καί χρησιμοποιώντας έχουμε: $v_g = c \sqrt{1 - \frac{324 \pi^2 N}{\omega^2}}$ (9)

6.3 Ο ταυιστής της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ενός αραίου καί ψυχρού αέριου πλάσματος, παρουσία μαγνητικού πεδίου με ένταση $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$, προκύπτει από τη σχέση (6-32).

Νά προσδιορίσετε τη σταθερά φάσης β του επίπεδου κύματος:

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \beta z)} = \vec{E} e^{j\omega t} \quad (1)$$

πού διαδίδεται μέσα στο πλάσμα και να αποδείξετε ότι το κύμα αυτό για να διαδίδεται πρέπει να είναι κυκλικά πολωμένο, δεξιότροφα ή αριστερόστροφα (βλ και Κεφ. 7 θεωρίας για την κυκλική πόλωση) .

Λύση

Ξέρουμε από τη θεωρία ότι αν το κύμα διαδίδεται, γενικά, υπό γωνία ϑ ως προς τον άξονα z , η λύση της εξίσωσης διασποράς δίνει τη σταθερά φάσης β της σχέσης (6-66) .

Στην περίπτωση μας το κύμα διαδίδεται κατά τον άξονα z , είναι δηλ. $\vartheta = 0$ και η (6-66) γίνεται :

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{2\epsilon_{11}\epsilon_{33} \pm \sqrt{4\epsilon_{12}^2\epsilon_{33}^2}}{2\epsilon_{33}} = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{2\epsilon_{11}\epsilon_{33} \pm 2\epsilon_{12}\epsilon_{33}}{2\epsilon_{33}} = \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon_{11} \pm \epsilon_{12}) \quad (2)$$

$$\text{"Όστε:} \quad \beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{11} \pm \epsilon_{12}} \quad (3)$$

παίρνοντας τα ϵ_{11} και ϵ_{12} από την (6-32) έχουμε:

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_g^2} \mp \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega} \omega_g}{\omega^2 - \omega_g^2} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\frac{\omega_p^2 (\omega \pm \omega_g)}{\omega}}{\omega^2 - \omega_g^2} \right)$$

$$\text{"ή} \quad \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega}}{\omega \mp \omega_g} \right) \quad (4)$$

Από τη θεωρία ξέρουμε ότι, στη γενική περίπτωση που $\vartheta \neq 0^\circ, 90^\circ$, το φασικό ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} του κύματος πρέπει να επαληθεύει την εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \beta^2 \cos^2 \vartheta & -j\epsilon_{12} & \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \beta^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\ j\epsilon_{12} & \epsilon_{11} - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \beta^2 & 0 \\ \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \beta^2 \sin \vartheta \cos \vartheta & 0 & \epsilon_{33} - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \beta^2 \sin^2 \vartheta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

Η (5) για $\vartheta=0^\circ$ γίνεται:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \beta^2 & j\epsilon_{12} & 0 \\ -j\epsilon_{12} & \epsilon_{11} - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

παίρνοντας τα ϵ_{11} και ϵ_{12} από την (6-32) και το β^2 από την (4) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \gamma - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_g^2} - \gamma + \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega}}{\omega \mp \omega_g} & j \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega} \omega_g}{\omega^2 - \omega_g^2} & 0 \\ -j \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega} \omega_g}{\omega^2 - \omega_g^2} & \gamma - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_g^2} - \gamma + \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega}}{\omega \mp \omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

Αλλά οι δύο πρώτοι διαγώνιοι όροι γράφονται:

$$\frac{\frac{\omega_p^2}{\omega} (\omega \mp \omega_g) + \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_g^2} = \pm \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega} \omega_g}{\omega^2 - \omega_g^2} = \mp \epsilon_{12} \quad (8)$$

Ωστε η (7) γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \mp \epsilon_{12} & j\epsilon_{12} & 0 \\ -j\epsilon_{12} & \mp \epsilon_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

Από την (9) προκύπτει ότι:

$$\mathcal{E}_z = 0 \quad (10)$$

$$\text{και } \text{ότι:} \quad \mp \epsilon_{12} \mathcal{E}_x + j \epsilon_{12} \mathcal{E}_y = 0 \quad (11)$$

$$\text{ή } \text{ότι:} \quad \mathcal{E}_y = \mp j \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_x e^{\mp j \frac{\pi}{2}} \quad (12)$$

Οι (10) και (12) εκφράζουν ότι το ηλεκτρικό πεδίο του κύματος βρίσκεται στο επίπεδο xy και ότι οι συνιστώσες του E_y και E_x έχουν ίσα πλάτη αλλά διαφορά φάσης $\pm \frac{\pi}{2}$, δηλαδή το κύμα είναι κυκλικά πολωμένο, δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα.

6.4 Στο αέριο πλάσμα του προηγούμενου προβλήματος να εξετάσετε τη διάδοση επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος κατά τη διεύθυνση \hat{x} (έγκάρσια διάδοση) όταν ω αρκετά μεγαλύτερη από την ω_g .

α. Να δώσετε τη σταθερά φάσης της τακτικής ακτίνας και να αποδείξετε ότι η ακτίνα αυτή είναι γραμμικά πολωμένη κατά τον άξονα z .

β. Να δώσετε τη σταθερά φάσης της έκτακτης ακτίνας και να αποδείξετε ότι η ακτίνα αυτή είναι γραμμικά πολωμένη κατά τη διεύθυνση \hat{y} και επιπλέον έχει συνιστώσα $E_x \neq 0$.

Λύση

α. Για την τακτική ακτίνα είναι:

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{11}} \quad (1)$$

όποτε η εξίσωση, που μας δίνει τις λύσεις του ηλεκτρικού πεδίου για $\theta = 90^\circ$, παίρνει τη μορφή (βλ. και σχέση (5) στο προηγούμενο πρόβλημα):

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & -j\epsilon_{12} & 0 \\ j\epsilon_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \quad (2)$$

Από την (2) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$E_z \neq 0 \quad (3)$$

$$j\epsilon_{12}\mathcal{E}_x = 0 \quad (4)$$

$$\epsilon_{11}\mathcal{E}_x - j\epsilon_{12}\mathcal{E}_y = 0 \quad (5)$$

Από τήν (4) καί τήν (5) ἔχουμε:

$$\mathcal{E}_x = 0, \quad \mathcal{E}_y = 0 \quad (6)$$

Ὡστε, ὑπάρχει μόνο z-συνιστώσα καί ἡ τακτική ἀκτίνα εἶναι γραμμικά πολωμένη κατὰ τή διεύθυνση \hat{z} , παράλληλα δηλ. πρὸς τὸ \vec{B}_0 .

β. Γιά τήν ἑκτακτη ἀκτίνα εἶναι:

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_{11}^2 - \epsilon_{12}^2}{\epsilon_{11}}} \quad (7)$$

ὁπότε ἡ ἐξίσωση πού μᾶς δύνει τίς λύσεις τοῦ πεδίου εἶναι :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & -j\epsilon_{12} & 0 \\ j\epsilon_{12} & +\frac{\epsilon_{12}^2}{\epsilon_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{\epsilon_{12}^2}{\epsilon_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = 0 \quad (8)$$

Από τήν (8) προκύπτουν οἱ σχέσεις:

$$\mathcal{E}_z = 0 \quad (9)$$

$$\epsilon_{11}\mathcal{E}_x - j\epsilon_{12}\mathcal{E}_y = 0 \quad (10)$$

$$j\epsilon_{12}\mathcal{E}_x + \frac{\epsilon_{12}^2}{\epsilon_{11}}\mathcal{E}_y = 0 \quad (11)$$

Οἱ (10) καί (11) ταυτίζονται καί δύνουν:

$$\mathcal{E}_y = -\frac{j\epsilon_{11}}{\epsilon_{12}}\mathcal{E}_x \quad (12)$$

ἀλλά γιά ω ἀρκετά μεγαλύτερη ἀπὸ τήν ω_g εἶναι:

$$\epsilon_{11} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{καί} \quad \epsilon_{12} = \frac{-\omega_p^2 \omega_g}{\omega^3} \quad (13)$$

Αηλαδή :

$$\mathbf{E}_y = j \frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{\frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega^3}} \mathbf{E}_x = j \frac{\omega^3 - \omega_p^2 \omega}{\omega_p^2 \omega_g} \mathbf{E}_x \quad (14)$$

Ωστε, στο επίπεδο yz (τό εγκάρσιο στη διάδοση) τό πεδίο \mathbf{E} έχει μόνο τή συνιστώσα \mathbf{E}_y εἶναι δηλ. γραμμικά πολωμένο κατά τή διεύθυνση \hat{y} . Τονίζουμε ὅμως ὅτι ἐμφανίζεται καί μιὰ συνιστώσα

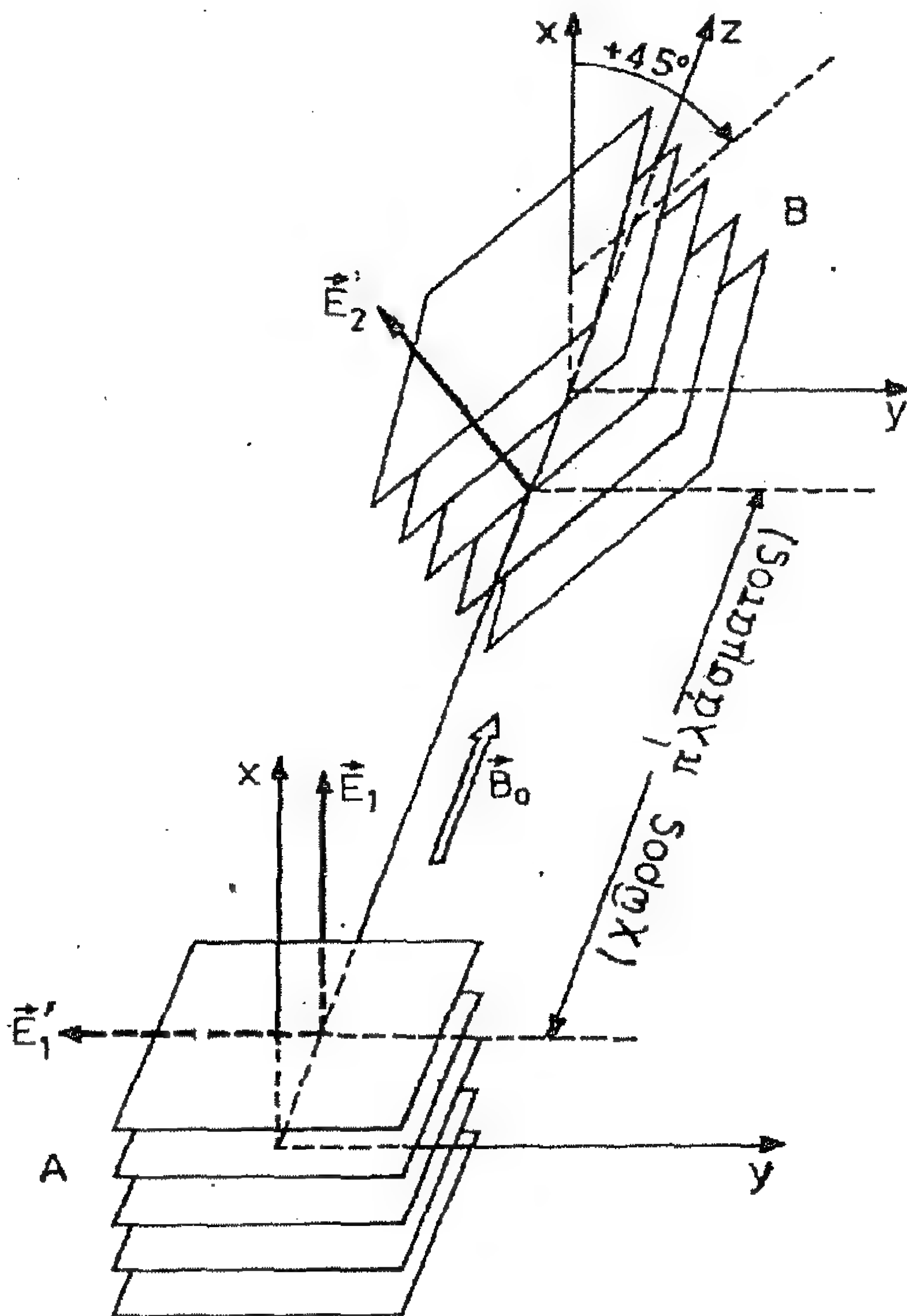
$\mathbf{E}_x \neq 0$ καί μάλιστα μέ διαφορά φάσης $\frac{\pi}{2}$ ἀπό τήν \mathbf{E}_y .

Έτσι τό ὅλικο πεδίο \mathbf{E} βρίσκεται σέ επίπεδο πού περιέχει τή διεύθυνση διάδοσης \hat{x} .

6.5 Ἡ διάταξη τοῦ σχήματος περιλαμβάνει μιὰ περιοχή ενός ἀραιοῦ αἰρίου πλάσματος, μέσα σέ σταθερό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$. Στήν ἀρχή A τῆς διάταξης (μπροστά ἀπό τό πλάσμα) ὑπάρχει ἓνα σύστημα A ἀπό ἀγωγίμα ἐπίπεδα, παράλληλα πρὸς τό επίπεδο yz καί σέ ἀπόσταση d τό ἓνα ἀπό τό ἄλλο.

Στό τέλος B τῆς διάταξης (πίσω ἀπό τό πλάσμα) ὑπάρχει ἓνα ὅμοιο σύστημα ἐπιπέδων B , στραμμένο ὅμως γύρω ἀπό τόν ἄξονα z , ἔτσι πού νά σχηματίζουν γωνία $+45^\circ$ μέ τό επίπεδο xz .

α. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι N ἡ πυκνότητα τῶν ἡλεκτρονίων τοῦ πλάσματος, σταθερή σ' ὅλη τήν περιοχή τοῦ πλάσματος, καί l τό συνολικό μήκος τῆς διαδρομῆς.



Πόση πρέπει να είναι η τιμή B_0 του μαγνητικού πεδίου, ώστε ένα γραμμικά πολωμένο επίπεδο κύμα να περνά ελεύθερα από όλη τη διάταξη; Δηλ. η B_0 πρέπει να είναι τέτοια, ώστε η στροφή Faraday που θα υποστεί ένα επίπεδο κύμα :

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \hat{x} e^{j(\omega t - kz)} \quad (1)$$

πού πέφτει πάνω στο σύστημα A, κατά τη διαδρομή του ως το B, να είναι -45° (βλ. Πρόβλ. 5.3)

β. Στο άκρο B της διάταξης πέφτει το επίπεδο κύμα:

$$\vec{E}(z, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\hat{x} - \hat{y}) e^{j(\omega t + kz)} \quad (2)$$

πώς θα συμπεριφερθεί η διάταξη, αν η απόσταση d των επιπέδων ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$d < \frac{\lambda}{2} \quad (3)$$

Συνοψίστε τα συμπεράσματά σας για τη συμπεριφορά της διάταξης, που μελετήθηκε.

Λύση

α. Το κύμα (1) είναι πολωμένο κάθετα στα επίπεδα A και επομένως περνά ελεύθερα μέσα από αυτά (βλ. πρόβλ. 5.3)

Η διάδοση μέσα στο μαγνητόπλασμα είναι διαμήκης, δηλαδή γίνεται παράλληλα προς το μαγνητικό πεδίο B_0 ($\nabla = 0$). Όπως είναι γνωστό από τη θεωρία, για τη στοιχειώδη διαδρομή $dl = dz$ η στροφή Faraday του επιπέδου πόλωσης του κύματος είναι^{*}:

$$d\Phi = - \frac{Ne^3 B_0}{8\pi^2 c \epsilon_0 m^2 f^2} dl = \frac{-Ne^3 B_0}{8\pi^2 c \epsilon_0 m^2 f^2} dl \quad (4)$$

* Το πρόσημο "πλήν" χρειάζεται γιατί στο σύστημα αξόνων του σχήματος οι άξονες y και z έχουν αντίθετες φορές από τους αντίστοιχους άξονες που χρησιμοποίησε ο Faraday.

Αποῦ $B_0 = \text{σταθ.}$ καὶ $N = \text{σταθ.}$, γιὰ ὅλο τὸ μῆκος l τῆς διαδρομῆς θά ἔχουμε :

$$\Phi = - \frac{Ne^3 B_0 l}{8\pi^2 c \epsilon_0 m^2 f^2} \quad (5)$$

θέτοντας $\Phi = -\frac{\pi}{4}$ (6)

ἔχουμε $B_0 = \frac{2\pi^3 c \epsilon_0 m^2 f^2}{Ne^3 l}$ (7)

β. Ἡ διάδοση τοῦ κύματος (2) εἶναι δυνατὴ μέσα ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα B γιὰτὶ αὐτὸ εἶναι πολωμένο ὑπὸ γωνία α .

$$\alpha \triangleq \arctan \frac{E_y}{E_x} = \arctan \frac{-\frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t + kz)}{\frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t + kz)} = \arctan(-1) = -45^\circ \quad (8)$$

δηλ. εἶναι πολωμένο κάθετα πρὸς τὰ ἐπίπεδα.

Ἡ διάδοση τοῦ κύματος (2) μέσα στὸ πλάσμα εἶναι διαμήκης μέ γωνία $\vartheta = 180^\circ$ ὡς πρὸς τὸ μαγνητικὸ πεδίο \vec{B}_0 .

Ἡ στοιχειώδης στροφή Faraday σ' αὐτὴ τὴν περίπτωσι δύνανται ἀπὸ τὴν (4) ἀλλά μέ ἀντίθετο πρόσημο, καὶ μέ $dl = -dz$ γιὰτὶ τὸ κύμα διαδίδεται κατὰ τὴ διεύθυνση $-\hat{z}$, ὁπότε :

$$d\Phi' = \frac{Ne^3 B_0}{8\pi^2 c \epsilon_0 m^2 f^2} dl = - \frac{Ne^3 B_0}{8\pi^2 c \epsilon_0 m^2 f^2} dz \quad (9)$$

Ὁλοκληρώνοντας γιὰ ὅλο τὸ μῆκος l ἔχουμε:

$$\Phi' = - \frac{Ne^3 B_0 l}{8\pi^2 c \epsilon_0 m^2 f^2} \quad (10)$$

καὶ παύροντας ἀπὸ τὴν (7) τὴν τιμὴ τοῦ B_0 ἔχουμε :

$$\Phi' = - \frac{\pi}{4} \quad (11)$$

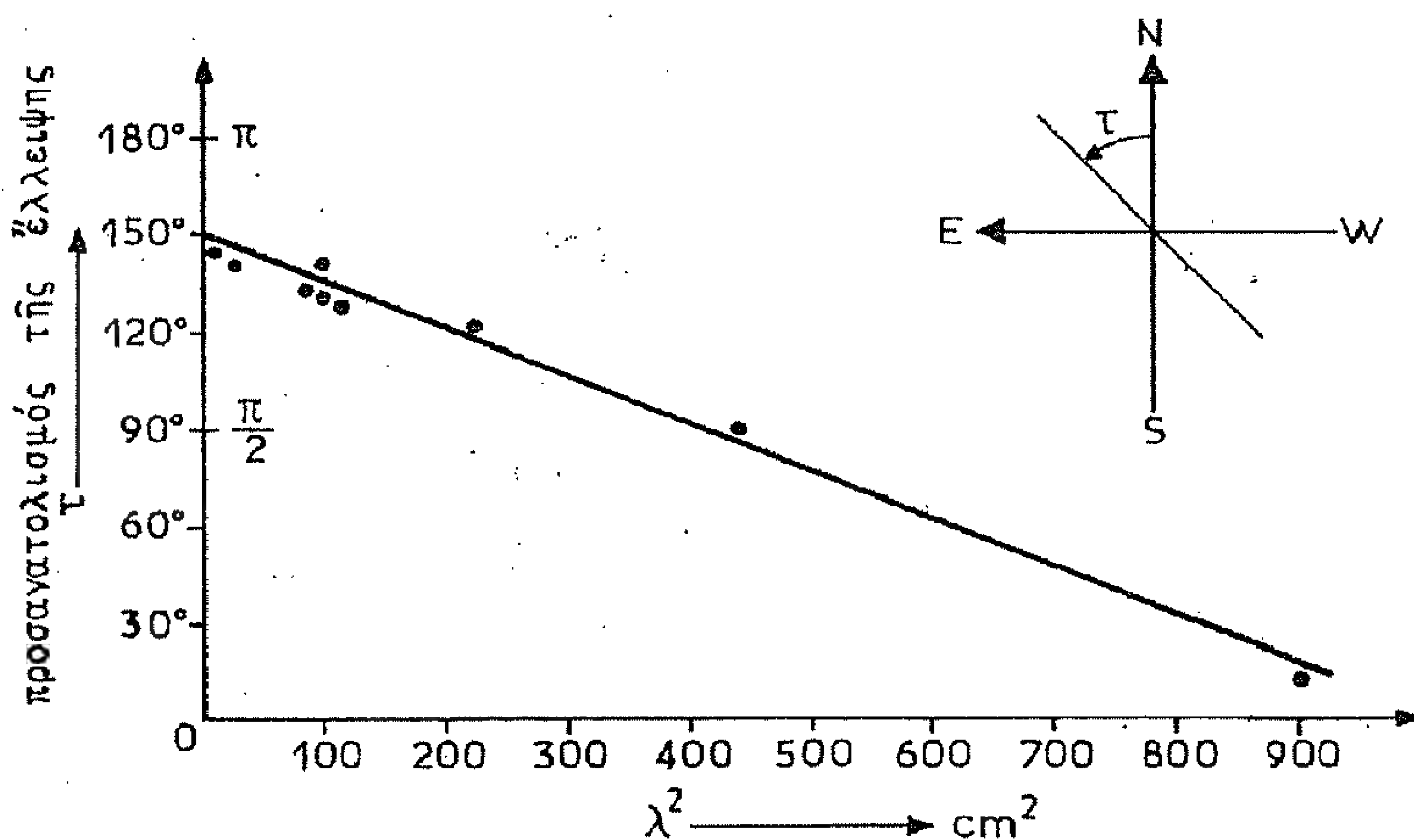
Όστε όταν τό κύμα φτάνει στά έπίπεδα Α έχει πόλωση μέ γωνία:

$$\alpha + \Phi' = -45^\circ - 45^\circ = -90^\circ \quad (12)$$

εἶναι δηλαδή πολωμένο κατά τόν ἄξονα y , δηλαδή παράλληλα μέ τά έπίπεδα Α καί ἀφοῦ $d < \frac{\lambda}{2}$ δέν περνᾷ ανάμεσά τους, ἀλλά ἀνακλᾶται.

Συμπέρασμα : Ἡ διάταξη τοῦ σχήματος, μέ τίς προϋποθέσεις (3) καί (7), εἶναι μονοκατευθυντική στή διάδοση γραμμικά πολωμένου κύματος, δηλαδή δρᾷ σάν ἀπομονωτής, γιὰ τόν ὅποιο δέν ἰσχύει ἡ ἀρχή τῆς ἀντίστροφης πορείας τοῦ ΗΜ-κύματος. Σημειώνεται ὅτι μιά τέτοια διάταξη ἀντί γιὰ αἶριο πλάσμα μπορεῖ νά ἔχει σάν ἐνεργό ὑλικό ἓνα κομμάτι φερρίτη.

6.6 Διάφοροι ἐρευνητές ἔκαναν μετρήσεις τῆς πόλωσης τῶν ραδιοκυμάτων, πού ἐκπέμπει ὁ ραδιοαστέρας Taurus A (νεφέλωμα τοῦ Καρκίνου). Μερικά ἀπό τά ἀποτελέσματά τους συνοψίζονται στό πῶ κάτω σχῆμα μέ τή μορφή διαγράμματος τῆς γωνίας τ , πού σχηματίζει ὁ μέγας ἄξονας τῆς ἑλλειψῆς τῆς πόλωσης μέ τό Βορρά, σέ συνάρτηση μέ τό τετράγωνο τοῦ μήκους κύματος (λ^2) τῆς ἀκτινοβολίας.



"Αν ἡ διάδοση θεωρηθεῖ "σχεδόν διαμήκης", δηλ. ὁ ἄξονάς της σχηματίζει πολύ μικρή γωνία ϑ μέ τό ὁλικό μαγνητικό πεδίο \vec{B} (τῆς γῆς καί τοῦ διαστρικοῦ χώρου) .

α.Νά προσδιορίσετε τήν ἐξίσωση τῆς εὐθείας τοῦ σχήματος.

β.Νά δώσετε τή θεωρητική της ἐξήγηση καί νά προσδιορίσετε τίς ἐκφράσεις καί τή σημασία τῶν σταθερῶν συντελεστῶν της. (Θέμα Ἐξετάσεων Ἰουλ. 1977)

(Ἀπ. α. $\tau = 2,62 - 26,2 \lambda^2$ (τό λ σέ m, τό τ σέ rad)

β. Ἡ σταθερά $2,62 \text{ rad} = 150^\circ \equiv \tau_0$ εἶναι ὁ προσανατολισμός τῆς ἑλλειψης τῆς πόλωσης τοῦ κύματος στό ξεκίνημά του ἀπό τόν ραδιαστέρα, ἐνῶ ἡ κλίση $K \equiv -26,2 \frac{\text{rad}}{\text{m}^2}$ χαρακτηρίζει τή διαδρομή

τοῦ κύματος καί τίς συνθήκες μαγνητικοῦ πεδίου πού ἔχει ὑποστεί ὥσπου νά φτάσει στή γῆ).

6.7 Θεωρεῖται γνωστός ὁ τύπος (γιά διαμήκη διάδοση).

$$\Phi_{\text{rad}} = \frac{2,36 \cdot 10^{-3}}{f_{\text{MHz}}^2} \int_0^l N_{\text{nl/cm}^3} B_{\text{Gauss}} dl_{\text{cm}}$$

α. Δεῦξτε ὅτι στήν περίπτωση, πού ἓνας παρατηρητής κάνει λήψη, μ' ἓνα δέπλο, τοῦ σήματος ἑνός τεχνητοῦ δορυφόρου πού πλησιάζει ἢ ἀπομακρύνεται ἀπ' αὐτόν κατά διεύθυνση περίπου παράλληλη πρός τό γήινο μαγνητικό πεδίο B , θά παρατηρεῖ ἓνα ἰσχυρό "fading" (αὐξομείωση στήν ένταση τοῦ σήματος) πού δέν θά ὀφείλεται σέ στροφή τοῦ δορυφόρου ἀλλά στό φαινόμενο Faraday.

β. Βοῆτε τόν τύπο πού συνδέει τό $\frac{d\Phi}{dt}$ μέ τήν ταχύτητα $v = \frac{dl}{dt}$ τοῦ δορυφόρου καί

γ. Υπολογίστε τη μέση ηλεκτρονική πυκνότητα της ιονόσφαιρας αν γνωρίζουμε ότι παρατηρούνται τρία fading ανά λεπτό στους 108 MHz από ένα δορυφόρο που είναι γνωστό ότι κινείται με 7 km/sec, ως προς τον παρατηρητή, παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο $B = 1 \text{ Gauss}$,
(Θέμα εξετάσεων 'Οκτωβρ. 1976)

$$(\text{'Απ. } \beta. \frac{d\Phi}{dt} = \frac{Ne^3 B_0 \omega}{8\pi^2 c \epsilon_0 m^2 f^2} \quad \gamma. \quad N = 1,1 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-3})$$

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 7

7.1 Δίνεται το διάνυσμα Stokes $[S_i]$ ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος, όλικά πολωμένου :

$$[S_i] = \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix}$$

Ξέροντας αυτό και μόνο να διατυπώσετε σχέσεις προσδιορισμού :

- α. Της μέγιστης ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας, που μεταφέρει το κύμα.
- β. Τοῦ πλάτους κάθε ἐγκάρσιας συνιστώσας (x,y)
- γ. Της γωνίας, που σχηματίζει κάθε ἄξονας τῆς ἑλλειψῆς, που χαρακτηρίζει τὴν πόλωση, μετὸν ἄξονα x.
- δ. Τοῦ σημείου (ε,τ) που παριστάνει τὴν πόλωση πάνω στὴ σφαῖρα τοῦ Poincaré.
- ε. Τῶν ἄλλων δύο παραμέτρων (γ,δ), που ἀντιστοιχοῦν στοῦ προηγούμενο σημείο, καὶ
- στ. Τοῦ ἀξονικοῦ πηλίκου τῆς ἑλλειψῆς, που χαρακτηρίζει τὴν πόλωση.

Λύση

α. Έστω S_x και S_y η ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας που μεταφέρει η αντίστοιχη εγκάρσια συνιστώσα. Ξέρουμε ότι η παράμετρος I ορίζεται :

$$I \triangleq S_x + S_y = S \quad (1)$$

Ωστε:

$$S = I \quad (2)$$

β. Από την (1) και από την

$$Q \triangleq \frac{E_{x0}^2}{Z} - \frac{E_{y0}^2}{Z} = S_x - S_y \quad (3)$$

προκύπτουν εύκολα οι σχέσεις:

$$E_{x0} = \sqrt{\frac{Z(I+Q)}{2}} \quad (4)$$

$$E_{y0} = \sqrt{\frac{Z(I-Q)}{2}} \quad (5)$$

γ. Έξναι:

$$U \triangleq Q \tan 2\tau \quad (6)$$

όπου τ η γωνία που σχηματίζει ο μεγάλος άξονας της έλλειψης με τον άξονα x . Αν τ_1 έξναι η αντίστοιχη γωνία του μικρού άξονα, έξναι :

$$\tau = \frac{1}{2} \arctan \frac{U}{Q} \quad (7)$$

$$\text{και} \quad \tau_1 = \tau + \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

δ. Από τη γνωστή σχέση :

$$V = S \sin 2\epsilon = I \sin 2\epsilon \quad (9)$$

και την (7) προκύπτει:

$$(\epsilon, \tau) = \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{V}{I}, \frac{1}{2} \arctan \frac{U}{Q} \right) \quad (10)$$

δηλ. ἡ παράμετρος ϵ ἔχει τό πρόσημο τῆς V .

ε. Ἡ παράμετρος γ προσδιορίζεται ἀπό τή σχέση ὁρισμοῦ της

$$\tan \gamma = \frac{E_{y0}}{E_{x0}} \quad (11)$$

καί ἀπό τύς (4) καί (5). Εἶναι δηλαδή:

$$\boxed{\tan \gamma = \sqrt{\frac{I-Q}{I+Q}}} \quad (12)$$

Τήν παράμετρο δ , πού εἶναι ἡ διαφορά φάσης ἀνάμεσα στίς δύο ἐγκάρσιες συνιστώσες, μπορούμε νά προσδιορίσουμε ἀπό τή γνωστή σχέση:

$$\sin \delta = \frac{\sin 2\epsilon}{\sin 2\gamma} \quad (13)$$

πού γράφεται καί:

$$\sin^2 \delta = \frac{\sin^2 2\epsilon}{4 \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma} = \frac{\sin^2 2\epsilon}{4 \frac{\tan^2 \gamma}{1 + \tan^2 \gamma} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \gamma}}$$

Χρησιμοποιώντας τύς (9) καί (12) ἔχουμε:

$$\sin^2 \delta = \frac{\frac{V^2}{I^2}}{4 \frac{\frac{I-Q}{I+Q}}{\left[1 + \frac{I-Q}{I+Q}\right]^2}} = \frac{\frac{V^2}{I^2} \cdot \frac{(2I)^2}{I+Q}}{4(I-Q)} = \frac{V^2}{I^2 - Q^2}$$

$$\eta \quad |\sin \delta| = \sqrt{\frac{V^2}{I^2 - Q^2}} \quad (14)$$

ὅπως φαίνεται ἀπό τή (13) ἡ δ ἔχει τό πρόσημο τῆς ϵ , δηλ. τό πρόσημο τῆς παραμέτρου V ὥστε :

$$\boxed{\delta = \arcsin \frac{V}{\sqrt{I^2 - Q^2}}} \quad (15)$$

στ. Τό αξονικό πηλίκιο (ΑΠ) είναι :

$$\text{ΑΠ} = |\cot \epsilon| \quad (16)$$

όπου τό ϵ τό έχουμε από τή (10)

7.2 Μιά δέσμη LASER, έλλειπτικά πολωμένη, περνά μέσα από ένα πλακίδιο $\lambda/4$ κι' αμέσως μετά μέσα από έναν γραμμικό πολωτή. Τό πλακίδιο $\lambda/4$ έχει τόν όπτικό του άξονα (γρήγορο άξονα) υπό γωνία 30° από τόν όριζόντιο άξονα (άξονα x). Περιστρέφοντας τόν πολωτή παρατηρούμε τήν έξοδό του και διαπιστώνουμε ότι ή δέσμη έξόδου μηδενίζεται όταν τό χαρακτηριστικό επίπεδο του πολωτή σχηματίζει γωνία 60° με τόν όριζόντιο άξονα x .

"Αν ή ένταση τής αρχικής δέσμης LASER είναι

$$I_1 = 1 \text{ kW/m}^2$$

νά προσδιοριστούν :

- α. Τό διάνυσμα Stokes τής δέσμης που βγαίνει από τό πλακίδιο $\lambda/4$ σε συνάρτηση με εκείνο που μπαίνει.
- β. Τά χαρακτηριστικά τής έλλειψης πόλωσης τής αρχικής δέσμης (δηλ. προσανατολισμός και ΑΠ) .
- γ. Η διαφορά φάσης δ που υπάρχει ανάμεσα στις δύο εγκάρσιες συνιστώσες τής αρχικής δέσμης.

Λ ύ σ η

- α. "Ας ποϋμε ότι τό διάνυσμα Stokes τής αρχικής δέσμης LASER είναι:

$$[S_i]_1 = \begin{bmatrix} I_1 \\ Q_1 \\ U_1 \\ V_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

όπου $I_1 = 1 \text{ kW/m}^2$

Τό διάνυσμα Stokes στην έξοδο του πλακιδίου $\lambda/4$ θα είναι :

$$[S_i]_2 = [M_{ij}]_{\lambda/4} [S_i]_1 \quad (2)$$

όπου $[M_{ij}]_{\lambda/4}$ ή μήτρα Mueller του πλακιδίου $\lambda/4$ προσανατολισμένου κατά 30° ως προς τον άξονα x.

Από τον πίνακα 7-III έχουμε :

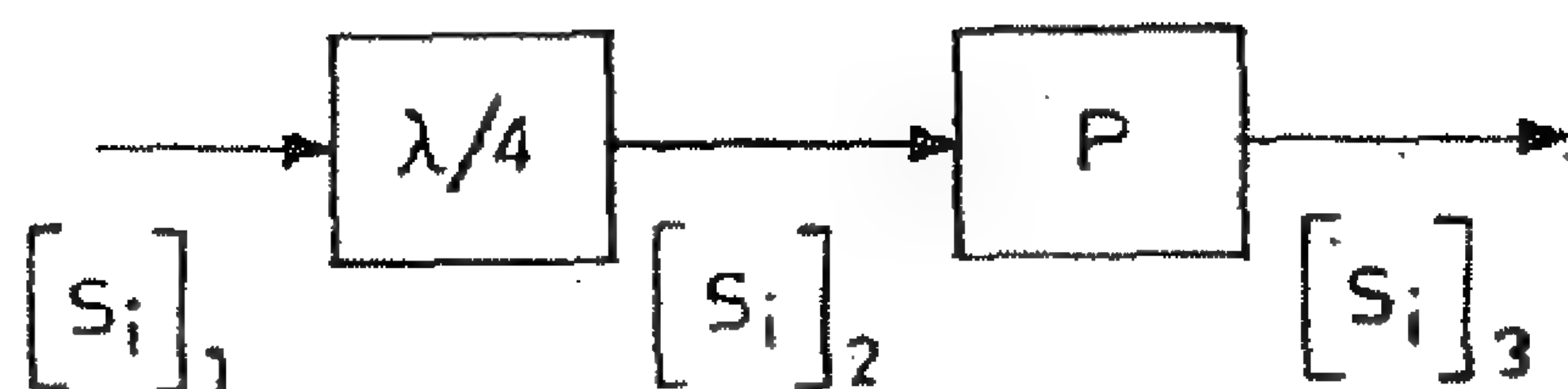
$$[M_{ij}]_{\lambda/4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & \sqrt{3}/4 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/4 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Οστέ:

$$[S_i]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & \sqrt{3}/4 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/4 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ Q_1 \\ U_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ \frac{1}{4}Q_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}U_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}V_1 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}Q_1 + \frac{3}{4}U_1 + \frac{1}{2}V_1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}Q_1 - \frac{1}{2}U_1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

β. Αφοῦ μετά τον πολωτή ή δέσμη μηδενίζεται όταν αυτός τοποθετηθεῖ σέ γωνία 60° συμπεραίνουμε ότι ή δέσμη $[S_i]_2$ εἶναι γραμμικά πολωμένη υπό γωνία :

$$60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$$



θά πρέπει λοιπόν νά εἶναι :

$$[S_i]_2 = \begin{bmatrix} I_2 \\ I_2 \cos(300^\circ) \\ I_2 \sin(300^\circ) \\ 0 \end{bmatrix} = I_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Από τῆς (4) καί (5) καί αφοῦ $I_2 = I_1 = 1 \text{ kW/m}^2$ έχουμε τό σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4}Q_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}U_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}V_1 &= \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}Q_1 + \frac{3}{4}U_1 + \frac{1}{2}V_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}Q_1 - \frac{1}{2}U_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Από τή λύση τοῦ συστήματος (6) προκύπτει:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{1}{4} \\ U_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ V_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

Ὡστε, τό ἀρχικό διάνυσμα Stokes εἶναι:

$$[S_i]_1 = \begin{bmatrix} I_1 \\ Q_1 \\ U_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Ὁ μέγας ἀξονας τῆς ἑλλειψης σχηματίζει μέ τόν ἀξονα x γωνία τ

$$\tau = \frac{1}{2} \arctan \frac{U_1}{Q_1} = \frac{1}{2} \arctan \sqrt{3} = \frac{1}{2} 60^\circ = 30^\circ$$

Ὡστε

$$\boxed{\tau = 30^\circ} \quad (9)$$

Τό ἀξονικό πηλίκο εἶναι:

$$A\pi = |\cot \epsilon| \quad (10)$$

ὅπου

$$\sin 2\epsilon = \frac{V_1}{I_1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (11)$$

$$\text{Από τήν (11) ἔχουμε } 2\epsilon = -60^\circ \text{ ἢ } \epsilon = -30^\circ \quad (12)$$

καί

$$\boxed{A\pi = \sqrt{3}} \quad (13)$$

γ. Ἡ διαφορά φάσης δ προσδιορίζεται ἀπό τή σχέση:

$$\sin \delta = \frac{V_1}{\sqrt{I_1^2 - Q_1^2}} \quad (14)$$

$$\text{ἢ} \quad \sin \delta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{16}}} = -0,894 \quad (15)$$

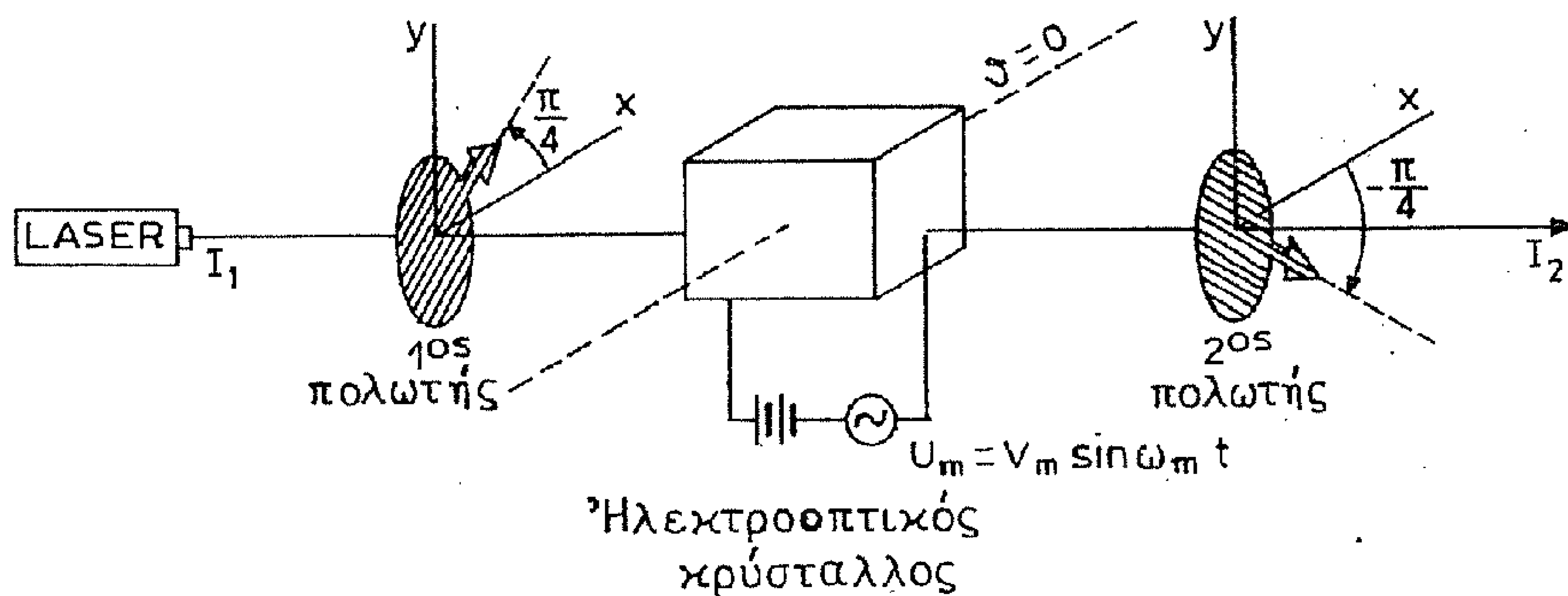
καί

$$\boxed{\delta = -63,43^\circ} \quad (16)$$

ἢ

$$\boxed{\delta = -63^\circ 26'}$$

7.3 Μιά δέσμη LASER, στην αρχή έντελως απόλωτη, περνά μέσα από τη διάταξη του σχήματος:



Ο 10^S πολωτής σχηματίζει 45° με τον άξονα x , ενώ ο $20^S - 45^\circ$.
 Ο ηλεκτροοπτικός κρύσταλλος είναι ένας γραμμικός έμβραδυντής, που έμβραδύνει κατά δ τη μία κάθετη συνιστώσα έναντι της άλλης. Η γωνία δ σχετίζεται με το σήμα U_m με τη σχέση :

$$\delta = \frac{\pi}{2} + k U_m = \frac{\pi}{2} + k V_m \sin \omega_m t \quad (1)$$

όπου k = σταθερά.

Ο γρήγορος άξονας του κρυστάλλου σχηματίζει γωνία $\delta=0$ με τον άξονα x . Αν I_1 ή ένταση της αρχικής δέσμης LASER

α. Νά προσδιορίσετε τη μήτρα Mueller της óπτικης διάταξης .

β. Νά προσδιορίσετε την ένταση I_2 της τελικής δέσμης και νά αποδείξετε ότι η τελική δέσμη είναι διαμορφωμένη κατά ένταση με κυκλική συχνότητα διαμόρφωσης ω_m .

(Υπόδειξη: τό ανάπτυγμα $\sin(a \sin \beta)$ νά τό πάρετε από τό σχετικό πύνακα τών ιδιοτήτων τών συναρτήσεων Bessel και νά θεωρήσετε μικρό V_m).

(θέμα έξετάσεων Οκτωβρ. 1977)

Λύση

Τό διάνυσμα Stokes της απόλυτης δέσμης στην είσοδο της διάταξης είναι :

$$[S_i]_1 = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Αν M_1 και M_2 είναι οι μήτρες Mueller των δύο πολωτών και M_K η μήτρα Mueller του κρυστάλλου, τό διάνυσμα Stokes της τελικής δέσμης θά είναι :

$$[S_i]_2 = M_2 M_K M_1 [S_i]_1 = M [S_i]_1 \quad (3)$$

όπου M η μήτρα Mueller του συστήματος. Από τό σχετικό πύνακα έχουμε :

$$\text{για } \vartheta = \frac{\pi}{4} : \quad M_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{για } \vartheta = 0 : \quad M_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{για } \vartheta = -\frac{\pi}{4} : \quad M_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \beta \end{bmatrix} \quad \text{όπου } \begin{cases} \mu = \sin \delta \\ \beta = \cos \delta \end{cases} \quad (4)$$

Άρατε η μήτρα Mueller του συστήματος είναι :

$$M = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1-\beta & 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta-1 & 0 & \beta-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

β. Τό διάνυσμα Stokes της δέσμης I_2 είναι :

$$[S_i]_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1-\beta & 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta-1 & 0 & \beta-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} I_1(1-\beta) \\ 0 \\ I_1(\beta-1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Η ένταση, λοιπόν, της τελικής δέσμης είναι :

$$I_2 = \frac{1}{4} I_1 (1-\beta) = \frac{1}{4} I_1 (1-\cos\delta) = \frac{I_1}{4} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} + kV_m \sin\omega_m t \right) \right)$$

ή τέλος
$$I_2 = \frac{I_1}{4} \left[1 + \sin(kV_m \sin\omega_m t) \right]$$
 (7)

Αλλά ισχύει η ιδιότητα (βλ. πίνακα I του παραρτήματος)

$$\sin(\alpha \sin\beta) = 2 J_1(\alpha) \sin\beta + 2 J_3(\alpha) \sin 3\beta + \dots$$

Ωστε :

$$\sin(kV_m \sin\omega_m t) = 2 J_1(kV_m) \sin\omega_m t + 2 J_3(kV_m) \sin 3\omega_m t + \dots \quad (8)$$

$$\text{και} \quad I_2 = \frac{I_1}{4} \left[1 + 2 J_1(kV_m) \sin\omega_m t + 2 J_3(kV_m) \sin 3\omega_m t + \dots \right] \quad (9)$$

Αν περιοριστούμε σε μικρά V_m τά πλάτη των ανώτερων αρμονικών μικραίνουν πάρα πολύ και είναι :

$$I_2 \approx \frac{I_1}{4} + \frac{I_1}{2} J_1(kV_m) \sin\omega_m t \quad (10)$$

Ωστε, η ένταση I_2 της τελικής δέσμης LASER είναι πρακτικά διαμορφωμένη στην κυκλική συχνότητα ω_m και μάλιστα με βάθος διαμόρφωσης :

$$m = \frac{\frac{I_1}{2} J_1(kV_m)}{I_{1/4}} = 2 J_1(kV_m) \quad (11)$$

7.4 Σ' έναν μικροκυματικό σταθμό κάνουμε λήψη του φέροντος κύματος ενός μακρινού πομπού με τις δύο παραβολικές κεραίες του σχήματος (K1 και K2). Το λαμβανόμενο κύμα είναι ολικά έλλειπτικά πολωμένο με το μεγάλο άξονα της έλλειψης οριζόντιο.

Οι κεραίες K1 και K2

έχουν το ίδιο ενεργό

άνοιγμα $A=2,5 \text{ m}^2$ και

αν τις χρησιμοποιού-

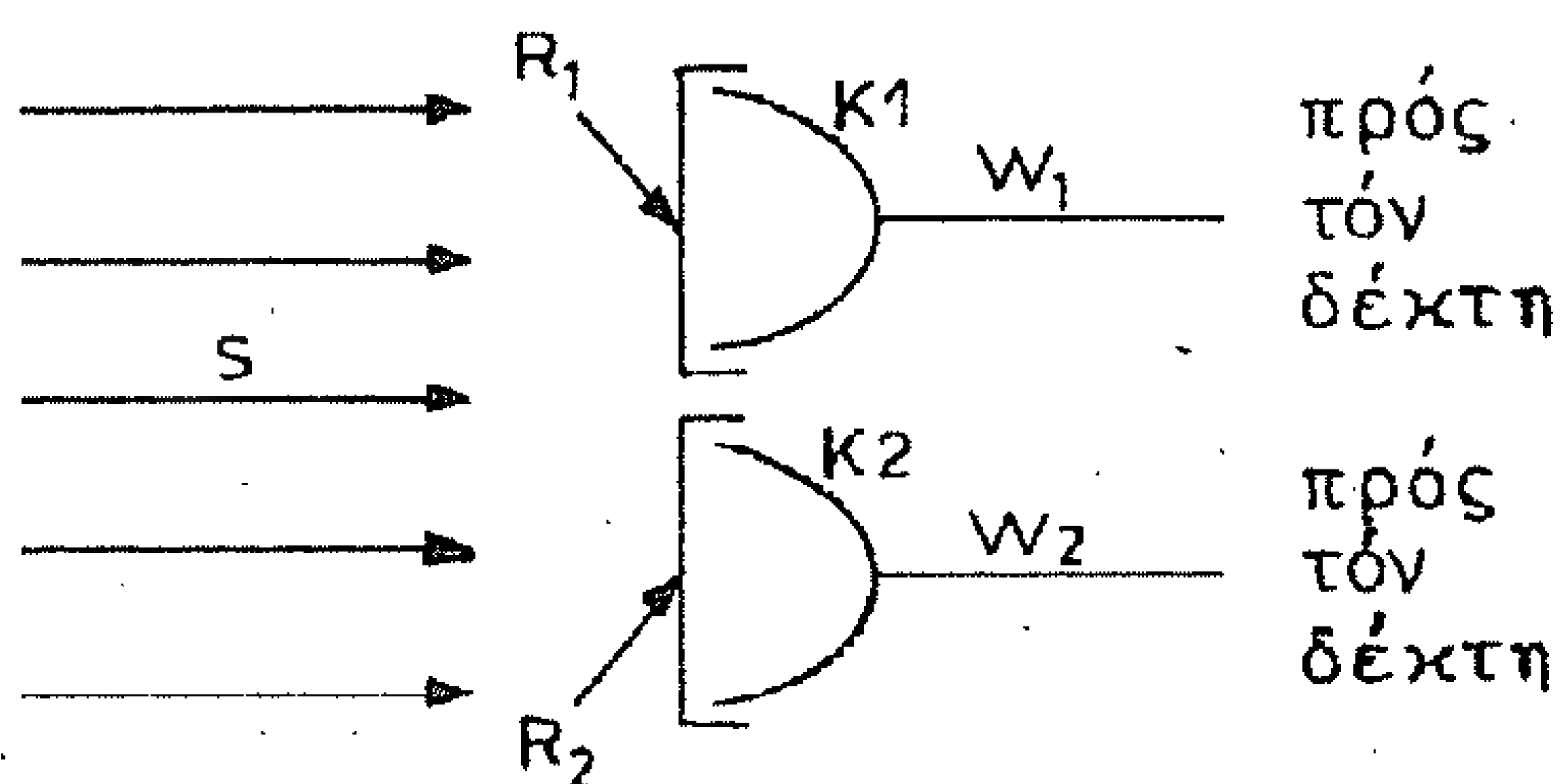
σαμε ως κεραίες εκ-

πομπής ή K1 θα ακτι-

νοβολοῦσε οριζόντια

γραμμικά πολωμένο κύμα, ενώ ή K2 θα ακτινοβολοῦσε κατακόρυφα

γραμμικά πολωμένο κύμα.



Η κεραία K1 καλύπτεται με ένα προστατευτικό φύλλο διηλεκτρικού (radome) R_1 , που προκαλεί εξασθένηση 3 dB στην προσπίπτουσα ισχύ, ενώ ή K2 καλύπτεται με το radome R_2 , που προκαλεί εξασθένηση 6 dB στην προσπίπτουσα ισχύ.

Αν στο δέκτη της κεραίας K1 λαβαίνουμε ισχύ $W_1 = 30 \mu\text{W}$, ενώ στο δέκτη της K2 λαβαίνουμε ισχύ $W_2 = 10 \mu\text{W}$ και θεωρήσουμε ότι ή γραμμή μεταφοράς από τις κεραίες στο δέκτη δεν έχει απώλειες.

α. Να προσδιοριστεί το πλάτος της έντασης (ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας) S του έλλειπτικά πολωμένου κύματος.

β. Να προσδιοριστεί το αξονικό πηλύκο $ΑΠ$ της έλλειψης πόλωσης του κύματος.

(Θέμα εξέτασεων 'Ιουλ. 1977)

(Απ. α. $S = 40 \mu\text{W}/\text{m}^2$

β. $ΑΠ = 1,22$)

7.5 "Ας θεωρήσουμε γνωστό ότι ο " βαθμός γραμμικής πόλωσης" ενός κύματος, που είναι μερικά έλλειπτικά πολωμένο, ορίζεται από το πηλίκο.

$$d_l = \frac{W_{||} - W_{\perp}}{W_{||} + W_{\perp}} \quad (1)$$

όπου $W_{||}$ η ισχύς λήψης μιας γραμμικά πολωμένης κεραίας, προσανατολισμένης παράλληλα με το μεγάλο άξονα της έλλειψης της πόλωσης και W_{\perp} η ισχύς λήψης της ίδιας κεραίας, προσανατολισμένης κάθετα προς το μεγάλο άξονα της έλλειψης.

Ποιά σχέση συνδέει τον d_l με το βαθμό πόλωσης d και το άξονικό πηλίκο $ΑΠ$; (θέμα εξέτασεων 'Οκτωβρ. 1978)

$$(\text{'ΑΠ.} \quad d_l = d \frac{(ΑΠ)^2 - 1}{(ΑΠ)^2 + 1})$$

7.6 "Ένας γεωστατικός δορυφόρος εκπέμπει γραμμικά πολωμένη ΗΜ δέσμη προς ένα σταθμό έδάφους, που διαθέτει κεραία λήψης δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένη. Η συχνότητα εκπομπής είναι f , η απόσταση "δορυφόρου-σταθμού έδάφους" είναι l , η μέση ηλεκτρονική πυκνότητα της διαδρομής του κύματος είναι N_e και η διάδοση θεωρείται διαμήκης (δηλ. παράλληλη με το μαγνητικό πεδίο B_0 της γης) .

"Αν η αρχική πόλωση του κύματος σχηματίζει γωνία α με τη διεύθυνση Βορρά-Νότου (ή διεύθυνση αυτή παίρνεται σαν άξονας των x)

α. Νά δοθεί μία σχέση υπολογισμού της συνολικής στροφής Faraday Φ , που θα υποστεί το κύμα ώσπου να φτάσει στο σταθμό.

β. Νά αποδειχτεί ότι αν αγνοηθεί κάθε άλλο φαινόμενο εκτός από τη στροφή Faraday, μπορεί να ληφθεί σαν μήτρα Mueller του μέσου, που διασχίζει το κύμα κατά τη διαδρομή του ή :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\Phi & -\sin 2\Phi & 0 \\ 0 & \sin 2\Phi & \cos 2\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

γ. Νά υπολογιστεῖ ἡ ἰσχύς λήψης N τῆς κεραίας καί νά ἀποδειχτεῖ ὅτι εἶναι ἀνεπηρέαστη ἀπό τή στροφή Faraday, πού προκαλεῖ τό μέσο τῆς διάδοσης.

(Θέμα ἐξετάσεων Δεκεμβρ. 1978)

(Απ. α.)
$$\Phi = - \frac{N_e e^3 B_0 I}{8 \pi^2 c \epsilon_0 m^2 f^2}$$

γ.
$$N = \frac{SA}{2}$$

7.7 α. Αναλύοντας τό διάνυσμα Stokes ενός μερικῶς ἑλλειπτικῶς πολωμένου ΗΜ κύματος μέ ἔνταση S , νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τοῦτο μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ σάν ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων Stokes τριῶν κυμάτων :

- Ἐνός (δεξιόστροφα ἢ ἀριστερόστροφα) κυκλικῶς πολωμένου μέ ἔνταση S_c .
- Ἐνός γραμμικῶς πολωμένου μέ γωνία πόλωσης $\alpha = \tau$ (δηλ. κατὰ τόν μεγάλον ἄξονα τῆς ἑλλειψῆς) καί ἔνταση S_l καί
- Ἐνός ἐντελῶς ἀπόλωτου μέ ἔνταση S_u .

β. Νά προσδιοριστεῖ ὁ " βαθμός κυκλικῆς πόλωσης "

$$d_c \equiv \frac{S_c}{S}$$

γ. Νά προσδιοριστεῖ ὁ " βαθμός γραμμικῆς πόλωσης " :

$$d_l \equiv \frac{S_l}{S}$$

δ. Νά προσδιοριστεῖ τό ποσοστό τῆς ἀπόλωτης ἰσχύος :

$$d_u = \frac{S_u}{S}$$

ε. Ποιά σχέση συνδέει τὰ μεγέθη d_c , d_l , καὶ d_u μεταξύ τους καὶ ποιά τὰ d_c καὶ d_l μεταξύ τους ;

(Δύνονται τὰ στοιχεῖα S , d καὶ ϵ τοῦ ἀρχικοῦ HM κύματος).

('Απ. β. $d_c = d |\sin 2\epsilon|$

γ. $d_l = d \cos 2\epsilon$

δ. $d_u = 1 - d_c - d_l$

ε. $d_c + d_l + d_u = 1$ καὶ $d_c^2 + d_l^2 = d^2$)

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ἡ βιβλιογραφία ἡ σχετική μέ τόν Ἠλεκτρομαγνητισμό εἶναι ἐξαιρετικά ἐκτενής. Περιοριστήκαμε ἐδῶ σέ μερικά μόνο βιβλία, ὅσα θεωρήσαμε ὅτι καλύπτουν ἀρκετά τίς διάφορες ὀψεις τῆς ὕλης τοῦ βιβλίου καθώς καί σέ μερικά κείμενα σιά ἑλληνικά πού θά μπορούσαν νά βοηθήσουν τόν Ἕλληνα σπουδαστή.

COLLIN R.: "Field Theory of Guided Waves" (Mc Graw 1963).

DURNEY C. and JOHNSON C.: "Introduction to Modern Electromagnetism" (Mc Graw 1969).

ELLIOTT R.: "Electromagnetism" (Mc Graw 1966).

JACKSON W.: "Classical Electrodynamics" (J. Wiley).

KRAUS J.: "Radioastronomy" (Mc Graw 1966).

KRAUS J. and CARVER: "Electromagnetism" (Mc Graw 1973).

LANDAU L. et LIFCHITZ: "Théorie du Champ" (Mir Publishers 1966).

PANOFSKY W. and PHILLIPS M.: "Classical Electricity and Magnetism" (Addison-Wesley 1964).

PLONSEY R. and COLLIN R.: "Principles and Applications of Electromagnetic Fields" (Mc Graw 1961).

QUÉMADA D.: "Ondes Dans les Plasmas" (Hermann 1968).

REITZ and MILFORD.: "Foundations of Electromagnetic Theory" (Addison-Wesley).

SCHWARTZ M.: "Principles of Electrodynamics" (Mc Graw 1972).

SOMMERFELD A.: "Electrodynamics" (Ac.Press 1964).

Σέ ἑλληνική γλώσσα:

ALONSO M. καί FINN E.: "Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική" Τόμος 2 (Μετάφραση ἀπό τοὺς Λ.Κ.Ρεσβάνη καί Τ.Α. Φίλιππα 1979)

ΒΟΥΔΟΥΡΗ Γ.: "Ἡλεκτρομαγνητικά Ἀντηχεῖα" ("Ἐκδοση Τ.Ε.Ε. 1968. Μία βελτιωμένη καί συμπληρωμένη ἔκδοση: "Cavités Electromagnétiques", Dunod 1971).

GRAWFORD F. et al.: "Ἡλεκτρισμός-Μαγνητισμός" (Μαθήματα Φυσικῆς τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ BERKELEY-Τόμος 2) (Μετάφραση τοῦ Ἐργαστηρίου Φυσικῆς τοῦ ΕΜΠ, 1978).

ΚΑΡΟΥΜΠΑΛΟΥ Κ.: "Θέματα Ἐφαρμοσμένων Μαθηματικῶν" (Ἀθήνα 1968).

ΡΟΪΛΟΥ Μ.: "Ἡλεκτρισμός-Μαγνητισμός" (Πανεπιστήμιο Πατρῶν 1975).

ΑΛΦΑΒΗΤΙΚΟ ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

A

*Αέριο		ιδιότητες.....	15-19
ήλεκτρονίων.....	132	ορισμός.....	5
ιονισμένο (βλ. ί- ονισμένο μέσο)		φυσική σημασία..	11-13
πλάσμα (βλ. ίονι- σμένο μέσο)		*Αποκοπή (βλ. συνθή- κη αποκοπής)	
*Ακτινοβολία		*Αποκοπής	
ίσχύος.....	49, 50, 52	συνθήκη.....	93
στοιχειώδους δι- πόλου:		συχνότητα.....	141
- ηλεκτρικού.....	60-67	*Απόλωτο κύμα (βλ. πόλωση)	
- μαγνητικού.....	68-75	*Απώλειες	
*Ακτινοβολίας		σέ μέσο διάδοσης	
(βλ. και πεδίο)		(βλ. διάδοση κύ- ματος)	
*Ανισότροπο μέσο.....	132	*Αριστερόστροφη πό- λωση (βλ. πόλωση)	
(βλ. και ιονισμέ- νο μέσο σέ μαγνη- τικό πεδίο)		*Αρμονικού πεδίου (βλ. έξισώσεις)	
*Ανάδελτα (βλ. τελε- στής).....	7-9		
*Αντηχεΐο (βλ. Ήλε- κρομαγνητικό άν- τηχεΐο)			
*Αντίσταση κυματική (βλ. κυματική άν- τίσταση)			
*Απόκλιση			
(Divergence).....	4, 5, 7, 11-13, 15-19		
έκφραση σέ διάφο- ρα συστήματα.....	17		
		Βαθμίδα (Grad).....	4, 5, 7-9, 9-11, 15-18
		έκφραση σέ διά- φορα συστήματα..	17
		ιδιότητες.....	15-19
		ορισμός.....	4
		φυσική σημασία..	9-11
		Βαθμός πόλωσης (βλ. και πόλωση κύμα- τος).....	169, 172

B

Βάθος διείσδυσης....	42	σε κυλινδρικό κυ- ματοδηγό	
Bessel		-τύπου TE.....	113-114
ρίζες.....	191	-τύπου TM.....	111-112
συναρτήσεις.....	185, 186, 189	σε ορθογώνιο κυ- ματοδηγό	
τροποποιημένες..	187	-τύπου TE.....	91-100
Γ		-τύπου TM.....	101-102
Γραμμική πόλωση (βλ. πόλωση)		σχεδόν διαμήκης..	148-149
Γυρομαγνητική συχνό- τητα (βλ. συχνό- τητα)		σχεδόν εγκάρσια..	148-149
Γυρομαγνητικός συν- τονισμός (βλ. συν- τονισμός)		ταχύτητα φάσης...	104
Grad (βλ. βαθμίδα)...		Διάνυσμα Poynting....	50, 51, 54 (βλ. καί θεώρημα Poynting)
Δ		μιγαδικό.....	54
Δείκτης διάθλασης... 146-148		Διάνυσμα του Stokes (βλ. καί πόλωση)...	165
(βλ. καί ιονι- σμένο μέσο)		Διανυσματική ανάλυση (βλ. τελεστές)	
Δεξιόστροφη πόλωση (βλ. πόλωση)		θεωρήματα.....	7
Διάδοση		τυπολόγιο.....	18
διαμήκης..... 147		Διανυσματικός τελε- στής (βλ. καί τε- λεστής).....	4-6, 7-19
επίπεδου κύματος 39-44, 44-46		ανάδελτα.....	7-9, 15
επίπεδου μονο- χρωματικού κύμα- τος..... 39-44		έκφραση σε ορθο- γώνιο σύστημα....	17
σε ιονισμένο μέ- σο..... 132-155		ιδιότητες.....	15-16
σε μέσο με μεγά- λη αγωγιμότητα.. 41-44		κύριοι τύποι.....	18
σε μέσο χωρίς α- πώλειες..... 41		όρισμοί.....	5
		φυσική σημασία...	13-15
		τυπολόγιο.....	17, 18
		Διασποράς εξίσωση (di- spersion relation)	142, 145

Διατήρηση τῆς ἐνέργειας

(βλ. θεώρημα Poynting)

Διαφορική ἐξίσωση

κυλινδρικοῦ κυματοδηγοῦ..... 183-191

Διαφορική ἐξίσωση κύματος (βλ. ἐξισώσεις κύματος)

Διαφορικός τελεστής

(βλ. τελεστής ἢ διανυσματικός τελεστής)

Διηλεκτρική σταθερά (βλ. καί τανυστής)

ἐνεργός..... 139

σχετική..... 140

Δίπολο

ἡλεκτρικό..... 60-67

μαγνητικό..... 68-75

στοιχειῶδες (βλ. καί στοιχειῶδες δίπολο)

Δυναμικά (βλ. Δυναμικό)

Δυναμικό..... 19, 31-35

ἐξισώσεις..... 32-35

ἐξισώσεις γιὰ ἁρμονικά πεδία..... 38-39

καθυστερημένο (retarded)..... 58-60

μὴ ὁμογενεῖς ἐξισώσεις..... 34-35

ὁρισμοί..... 31

στατικό..... 55-56, 56-58

στατικό μονόμετρο.. 55-56

στάτικό διανυσματικό..... 56-58

χρονικά μεταβαλλόμενο..... 58-60

Ε

Ἐγκάρσιος (βλ. καί κυματικός τύπος)

ἡλεκτρικός κυματικός τύπος (TE)..... 91-100, 113-114, 120-122, 124-127

μαγνητικός κυματικός τύπος (TM).... 101-102, 111-113, 122-124, 127-130

Εἰδική ἀγωγιμότητα (βλ. τανυστής)

Ἐκτακτη ἀκτίνα..... 147, 149

Ἐκφυλισμένος κυματικός τύπος σέ ἀντηχείο..... 124

Ἐλλειπτική πόλωση (βλ. πόλωση)

Ἐνεργός διηλεκτρική σταθερά (βλ. καί τανυστής)..... 139

Ἐξασθένηση κύματος

σέ κυλινδρικό κυματοδηγό..... 114-115

σέ ὀρθογώνιο κυματοδηγό..... 106-107

Ἐξισώσεις

ἁρμονικοῦ πεδίου.. 38-39

βασικὲς τοῦ ἡλεκτρομαγνητισμοῦ (βλ. καί ἐξισώσεις Maxwell)..... 29

ἡλεκτρομαγνητισμοῦ (βλ. ἐξισώσεις Maxwell)

κύματος..... 34-35

μὴ ὁμογενεῖς..... 34-35

Maxwell (βλ. ἐξισώσεις Maxwell)

ὁμογενεῖς.....	35	-πεδριακή κατανομή	129
πεδίου.....	32-39, 36-38, 38-39	-τύπος TE.....	125-127
Ἐξισώσεις Maxwell...	22-23, 24-27, 30	-τύπος TM.....	127-129
γιά ἁρμονικά πε- δία καὶ πηγές....	30	ὀρθογώνιο.....	119-125
δεύτερη.....	25, 30	-πεδριακή κατανομή	125
πίνακας.....	29	-τύπος TE.....	120-122, 124-125
πρώτη.....	24, 30	-τύπος TM.....	122-123
τέταρτη.....	27, 30	Σύζευξη μέ γραμ- μή καὶ δέσμη.....	130
τρίτη.....	26, 30	Θ	
φυσικοὶ νόμοι πού ἀντιστοιχοῦν.....	22-23	θεώρημα	
Ἐξίσωση διασποράς...	142, 145	Gauss.....	7
Ἐξίσωση συνέχειας...	12, 27-29	Poynting.....	47-50, 51-54, 54-55
Ἐπαγωγῆς πεδίο.....	65, 66, 73	Stokes.....	7
Ἐπίπεδο κύμα.....	39, 41	I	
σέ ἰονισμένο μέσο	132-150	Ἰονισμένο μέσο.....	132-149
σέ μαγνητόπλάσμα.	132-150	δείκτης διάθλασης	146-148
σέ μέσο μέ ἀπώ- λειες.....	41-44	διάδοση κύματος (βλ. διάδοση)	
σέ μέσο χωρίς ἀ- πώλειες.....	41	εἰδική ἀγωγιμότη- τα.....	132-139
Εὐκίνησία (βλ. τανυ- στής)		παρουσία πεδίου..	132
Extraordinary) (βλ. ἐκτακτὴ ἀκτίνα)		σταθερά διάδοσης.	143-149
Η		στροφή Faraday (βλ. στροφή)	
Ἡλεκτρικὸ δίπολο (βλ. δίπολο)		τανυστὴς διηλε- κτρικῆς σταθερᾶς.	139-143
Ἡλεκτρομαγνητικὸ Ἀντηχεῖο		τανυστὴς εὐκίνη- σίας.....	132-139
διέγερση.....	130	Ἰσχύς	
κυκλικὸ κυλινδρι- κὸ.....	125-129	ἀκτινοβολία.....	49, 50, 52
		μιγαδική.....	54

Κ		Κυματική αντίσταση	
Καθυστερημένο (βλ. δυναμικό)		κυματοδηγοῦ.....	99, 101,
Καταβόθρα (βλ. πεδίο)		μέσου.....	67, 74
Κοιλότητες (βλ. ἠλεκτρομαγνητικά ἀντηχεῖα)		Κυματικός τύπος ἀντηχείου (ἢ στάσιμος κυματικός τύπος)	
Κυκλοφορία πεδίου (βλ. στροβιλισμό).....	13-14	κυλινδρικοῦ	
Κύμα (βλ. καί κύματος)		- Ἐγκάρσ. ἠλεκ. (TE _{n1α}).....	125-127
ἀπό στοιχειῶδες δίπολο.....	60-67, 68-75	- Ἐγκάρσ. Μαγν. (TM _{n1α}).....	127-129
ἐπίπεδο (βλ. ἐπίπεδο κύμα καί διάδοση)		ὀρθογώνιου	
πολωμένο (βλ. καί πόλωση).....	155-182	- Ἐγκάρσ. ἠλεκ. (TE _{mnp}).....	120-122, 124-125
σέ ἀντηχεῖο (βλ. ἠλεκτρομαγνητικό ἀντηχεῖο)		- Ἐγκάρσ. Μαγν. (TM _{mnp}).....	122-124
σέ κυματοδηγό (βλ. σφαιρικό κύμα)		Κυματικός τύπος κυματοδηγοῦ (ἢ "τρέχοντες" κυματικοί τύποι)	
Κύματος		ἐκφυλισμένος.....	124
διάδοση (βλ. Διάδοση)		- Ἐγκάρσ. ἠλεκ. (TE)	113-114
ἐπίπεδο (βλ. Ἐπίπεδο κύμα)		- Ἐγκάρσ. μαγν. (TM)	111-113
πόλωση (βλ. καί πόλωση).....	155-182	ὀρθογώνιου	
σταθερά (βλ. Σταθερά)		- Ἐγκάρσ. ἠλεκ. (TE)	91-100
τύπος (βλ. Κυματικός τύπος)		- Ἐγκάρσ. μαγν. (TM)	101-102
Κυματάνυσμα.....	44-46, 144-146	Κυματοδηγός	
Κυματαριθμός.....	44, 89	διέγερση.....	118
		εἰσαγωγή.....	84-86
		κυκλικός κυλινδρικός.....	108-119
		- ἔξασθένιση.....	114-115
		- κυματική ἀντίσταση.....	111
		- ὀρικό μήκος κύματος.....	111

-πεδριακή κατανομή..	116	μή ομογενών εξισώ- σεων.....	55
-τύπος TE.....	113-114	μονοχρωματικού κύ- ματος.....	39-41
-τύπος TM.....	111-113	Laplacien (βλ. Λαπλα- σιανή)	
όρθογώνιος.....	87-107	Longitudinal (βλ.διά- δοση διαμήκης)	
-έξασθένηση.....	106-107	Lorentz (βλ. Συνθήκη του)	
-κυματική αντίσταση	93-97, 102	M	
-πεδριακή κατανομή..	98,100	Μαγνητοαντίσταση.....	138
-τύπος TE.....	91-100	Μαγνητόπλασμα (βλ.ίο- νισμένο μέσο)	
-τύπος TM.....	101-102	Μετασχηματισμός πόλω- σης (βλ. μήτρα Mueller)	
σύζευξη.....	118	Μήκος κύματος	
Coherency (βλ. μήτρα συνεκτικότητας πο- λωμένου κύματος)		διάδοσης σε κυ- λινδρικό κυματο- δηγό.....	111
Curl (βλ. Στροβιλισμός)		διάδοσης σε όρθογ. κυματοδηγό.....	94
Quasi		όρικό (βλ. όρικό μήκος κύματος)	
Longitudinal (βλ. διάδοση σχεδόν δια- μήκης)		Μήτρα (πολωμένου κύ- ματος) (βλ. καί πόλωση κύματος)	
Transverse (βλ.διά- δοση σχεδόν.έγκάρ- σια)		κεραίας.....	173-176
Λ		μετασχηματισμού (βλ. Mueller)	
Λαπλασιανή (Laplacien)	6,9, 15-17	Mueller.....	179-182
έκφραση σε διάφορα συστήματα.....	17	παραστατική.....	173-182
όρισμός.....	6	συνεκτικότητας (coherency).....	177
φυσική σημασία.....	15	Μοναδιαίο διάνυσμα.....	1,2
Λύση			
γενική, επίπεδου κύ- ματος.....	44-46		
εξίσωσης πεδίων....	39-40, 41-44, 44-46		
επίπεδου κύματος...	44-46		

Maxwell (βλ. Ἐξισώσεις
Maxwell)

Mode (βλ. κυματικός τύ-
πος)

Mueller (βλ. πόλωση κύ-
ματος, μήτρα)

N

Νόμος

Ampère..... 22

Gauss..... 23

Ohm..... 23

Faraday..... 22

D'Alembert (βλ. τελε-
στής)..... 35

Divergence (βλ. Ἀπό-
κλιση)..... 4

O

Ὀλικά πολωμένο κύμα
(βλ. πόλωση)

Ὀλική

στροφή Faraday.... 152

Ὀρθογώνιο ἀντηχεῖο
(βλ. ἡλεκτρομαγνη-
τικό ἀντηχεῖο)

Ὀρθογώνιος κυματοδη-
γός (βλ. κυματοδη-
γός)

Ὀριακές συνθήκες (ἢ
συνθήκες στά ὅρια) 75-83

εἰδικές περιπτώσεις 81-83

ἐφαπτομενικές συνι-
στῶσες πεδίων..... 77-80

κάθετες συνιστῶσες
πεδίων..... 75-77

στήν ἐπιφάνεια με-
ταξύ διηλεκτρικῶν. 81

στήν ἐπιφάνεια τέ-
λειων ἀγωγῶν..... 81-83

συνοπτικός πίνακας 83

Ὀριακό μήκος κύματος

σέ κυκλικό ἀντηχεῖο 127, 128

σέ κυλινδρικό κυ-
ματοδηγό..... 111

σέ ὀρθογώνιο ἀντη-
χεῖο..... 123

σέ ὀρθογώνιο κυμα-
τοδηγό..... 93-97,
102

Ordinary (βλ. τακτική
ἀκτίνα)

Π

Παράγοντας σύζευξης κε-
ραίας-κύματος (βλ.
σύζευξη καί πόλωση)

Παράμετροι πόλωσης (βλ.
πόλωση)

Πεδία (βλ. πεδίο)

Πεδιακή κατανομή

κυλινδρικοῦ ἀντη-
χείου..... 129

κυλινδρικοῦ κυμα-
τοδηγοῦ..... 116

ὀρθογώνιου ἀντηχεί-
ου..... 120,
124-125

ὀρθογώνιου κυματο-
δηγοῦ..... 98, 100

Πεδίο

ἀκτινοβολούμενο ἀπό
δίπολο (βλ. δίπολο)

ἀστροβίλο..... 14

γνώση του.....	19	διάνυσμα του Stokes	165
διανυσματικό.....	4-6, 19-20	έλλειπτική.....	155, 156
έξισώσεις.....	32-35, 36-38	επίδραση γραμμικής διάταξης (βλ. μή- τρα Mueller)	
έπαγωγής.....	66	κανονικοποιημένες παράμετροι.....	166, 170
κατανομή (βλ. πε- διακή κατανομή)		κεραίας.....	173-175
καταβόθρα.....	11-12	κυκλική.....	155, 156, 157
κυκλοφορία (βλέπε στροβιλισμός)		μερική.....	162-163, 167-172
κυματικού τύπου TE, TM (βλ. κυματικός τύπος)		μήτρα (παραστατική)	173-182
κυματοδηγοῦ (βλ. κυ- ματοδηγός)		μήτρα κεραίας.....	173-176
μιγαδική περιγραφή	19	μήτρα Mueller.....	179-182
μονόμετρο.....	4-6, 19-20	μήτρα συνεκτικότη- τας.....	177
όριακές συνθήκες..	75-83	ολική.....	155-161
πηγή.....	11-12	παράμετροι.....	156, 158-160, 162-174
παλωμένο.....	155-182	παράμετροι Stokes..	162-174
πότε τό γνωρίζουμε τέλεια.....	19	Παραστατική μήτρα..	173-182
στροβιλό.....	14	Poincaré.....	158
σωληνοειδές.....	12	σύζευξη κεραίας-κύ- ματος.....	174-175
φασικό (phasor)...	20-21	σφαίρα του Poincaré	158-160
χρονική περιγραφή.	19-21	Stokes παράμετροι	162-174
Πλάσμα (βλ. ιονισμένο μέσο)		τελείως απόλυτο....	162, 167-172
Πόλωση κύματος		τυχαία.....	162
απόκριση κεραίας..	160	Προσαρμογή πόλωσης	
αριστερόστροφη....	158, 160	κύματος-κεραίας....	174, 175
βαθμός πόλωσης....	169, 172	Πυκνότητες ρεύματος	
γεωμετρική περιγρα- φή.....	156, 159	απόκρισης.....	32
γραμμική.....	155, 157	έπιβολής.....	32
δεξιόστροφη.....	158, 160	Poincaré (σφαίρα) (βλ. πόλωση)	

Poynting (βλ. θεώρημα καί διάνυσμα)		Στροφή Faraday.....	150-154
P		για σχεδόν διαμή- κη διάδοση.....	151
Retarded Potential (βλ. δυναμικό κα- θυστερημένο)		για σχεδόν εγκάρ- σια διάδοση.....	153
Rotation		ολική.....	152
Faraday (βλ. καί στροφή).....	150-154	Στροβιλισμός (curl, ro- tation).....	5, 6, 8, 13-15, 15-19
(βλ. στροβιλι- σμός).....	5	έκφραση σέ διάφορα συστήματα.....	17
Σ		ιδιότητες.....	15-19
Σταθερά		όρισμός.....	5
διάδοσης.....	40, 41, 42, 93, 111, 141, 143-149	φυσική σημασία....	13-15
διηλεκτρική στα- θερά.....	139-143	Σύζευξη πόλωση κεραί- ας-κύματος.....	174-175
έξασθένησης.....	40, 41, 42	(βλ. καί πόλωση)	
φάσης.....	40, 41, 42, 44, 103, 142, 149-152	Συνεκτικότητας (βλ. μήτρα)	
Στάσιμοι κυματικοί τύποι (βλ. κυμα- τικός τύπος άν- τηχείου)		Συνθήκης αποκοπής όρθογώνιου κυματο- δηγοῦ.....	93
Στάσιμοι κυματικοί τύποι (βλ. κυμα- τικός τύπος άν- τηχείου)		Συνθήκη τοῦ Lorentz...	33, 34
Στοιχείο		Συνιστώσες πεδίου όριακές (βλ. όρια- κές συνθήκες)	
έπιφάνειας.....	3, 4	Συνθήκες στά όρια (βλ. όριακές συνθήκες)	
μήκους.....	3, 4	Συντελεστές	
όγκου.....	3, 4	κλίμακας.....	1, 3
Στοιχειώδες δίπολο		Συντελεστής έξασθένη- σης, (βλ. καί έ- ξασθένηση κύματος)	107, 114
ήλεκτρικό.....	60-67	Συντεταγμένες	
μαγνητικό.....	68-75	γραμμές.....	1, 2, 3, 4
		έπιφάνειες.....	1, 2, 3, 4

Συντονισμός		Stokes παράμετροι (βλ. πόλωση κύματος)	
γυρομαγνητικός...	137		
Σύστημα συντεταγμένων	1	T	
έκφραση διανυσμα- τικών τελεστών (βλ. καί τελεστής)....	17	Τακτική ακτίνα.....	147, 149
καμπυλόγραμμων...	1-4	Τανυστής	
καρτεσιανό.....	2	άγωγιμότητας.....	136
κυλινδρικό.....	2	διηλεκτρικής στα- θεράς.....	139-143
όρθογώνιο.....	1	είδικης άγωγιμό- τητας.....	136-138
σφαιρικό.....	3	εύκινησίας.....	132-139
Συχνότητα		"κυματανύσματος".	144
γυρομαγνητική....	135	Ταχύτητα	
κρίσιμη.....	141	κύματος.....	35
όρική (βλ. Συχνό- τητα όρική)		όμάδας.....	105
πλάσματος.....	139, 141	φάσης.....	104-105
συντονισμού άντη- χείου.....	124	Τελεστής (βλ. καί δια- νυσματικός τελε- στής).....	4-6, 7-19
Συχνότητα όρική		ανάδελτα.....	7-9
κυλινδρικού κυμα- τοδηγοῦ.....	112, 113, 115	έκφραση σέ όρθο- γώνιο σύστημα....	17
όρθογώνιου κυμα- τοδηγοῦ.....	103	ιδιότητες.....	15-16
συντονισμού άντη- χείου.....	124, 127	κύριοι τύποι.....	18
Σφαίρα τοῦ Poincaré (βλ. πόλωση)		Nabla (ή Hamilton)	8
Σφαιρικό κύμα		D'Alembert.....	35
άπό ήλεκτρικό δί- πολο.....	65, 66	Del (ή Hamilton).	8
άπό μαγνητικό δί- πολο.....	73	όλοκληρωτικός....	5
Σχετική διηλεκτρική σταθερά (βλ. καί τανυστής).....	140	όρισμοί.....	5
		φυσική σημασία...	13-15
		τυπολόγιο.....	17, 18
		Hamilton (ή del ή nabla).....	8
		TE (βλ. κυματικός τύ- πος κυματοδηγοῦ, άντηχείου)	

TM (βλ. κυματικός τύπος
κυματοδηγοῦ, ἀντη-
χείου)

Τρέχοντες κυματικοί τύ-
ποι (βλ. κυματικοί
τύποι κυματοδηγῶν)

Τύπος κυματικός (βλ.
κυματικός τύπος κυ-
ματοδηγῶν, ἀντηχεί-
ων)

Transverse (βλ. διάδοση
ἐγκάρσια)

Φαινόμενο

Faraday (βλ. Στροφή)

Hall..... 138

Faraday Rotation (βλ. καί
στροφή Faraday)..... 150-154

Phasor (βλ. καί φασικό
πεδίο)..... 20-21

X

Hall (βλ. φαινόμενο)

